Estado de Nueva York

Estándares Estatales

Comunes de Educación P-12

para

Matemáticas

Este documento incluye todos los Estándares Estatales Comunes de Educación en Matemáticas además de las adiciones recomendadas de Nueva York. Todas las adiciones recomendadas del Grupo de Trabajo de Educación en Matemáticas del Estado de Nueva York se incluyen en este documento resaltadas con amarillo bajo el dominio relacionado

COMMON CORE
STATE STANDARDS INITIATIVE
PREPARING AMERICA'S STUDENTS FOR COLLEGE & CAREER

Índice

Introducción

Hacia una mayor concentración y coherencia

Las experiencias matemáticas durante la primera infancia deben concentrarse en (1) números (que incluye números enteros, operaciones y relaciones) y (2) geometría, relaciones espaciales y medición, dedicando más tiempo de aprendizaje en matemáticas a los números que a otros temas. Los objetivos del proceso matemático deben integrarse en estas áreas de contenido.

—Aprendizaje en matemáticas en la niñez temprana, Consejo Nacional de Investigación, 2009

Los estándares compuestos [de Hong Kong, Corea y Singapur] tienen varias características que pueden informar un proceso de evaluación comparativa internacional para el desarrollo de estándares de matemáticas para K–6 en EE.UU. Primero, los estándares compuestos se concentran en el aprendizaje temprano de matemáticas en los aspectos de números, mediciones y geometría con un énfasis menor en análisis de datos y poca exposición al álgebra. Los estándares de Hong Kong para los grados 1-3 dedican aproximadamente la mitad del tiempo objetivo a los números y la mayoría del tiempo restante a la geometría y medición.

— Ginsburg, Leinwand y Decker, 2009

Ya que los conceptos matemáticos en los libros de texto [de EE.UU.] a menudo son débiles, la presentación se torna más mecánica que el ideal. Analizamos los libros de texto tradicionales y no tradicionales que se usan en EE.UU. y encontramos esta debilidad conceptual en ambos.

— Ginsburg et al., 2005

Existen muchas maneras de organizar el programa de estudios. El desafío, que rara vez se supera hoy en día, es evitar los que distorsionan las matemáticas y desaniman a los estudiantes.

— Steen, 2007

Durante más de una década los estudios de investigación de educación en matemáticas en países de alto rendimiento han apuntado a la conclusión de que el programa de estudios para matemáticas en los Estados Unidos debe estar mucho más concentrado y ser más coherente para mejorar el aprovechamiento en matemáticas en este país. A fin de cumplir la promesa de estándares comunes, los estándares deben resolver el problema de un programa de estudios que "es de una milla de ancho y una pulgada de profundidad". Estos Estándares son una importante respuesta a ese desafío.

Es importante reconocer que "menos estándares" no son un sustituto para estándares concentrados. Lograr "menos estándares" sería sencillo si se recurriera a afirmaciones amplias y generales. En vez de eso, estos Estándares tienen por objetivo la claridad y especificidad.

Evaluar la coherencia de un conjunto de estándares es más difícil que evaluar su concentración. William Schmidt y Richard Houang (2002) han comentado que los estándares de contenido y el programa de estudios son coherentes si:

se articulan a través del tiempo como una secuencia de temas y actividades que sean lógicos y que reflejen el carácter secuencial o jerárquico del contenido disciplinario de donde se deriva el tema, según corresponda. Es decir, qué y cómo se enseña a los estudiantes debe reflejar solamente los temas que caen dentro de cierta disciplina académica, sino también las ideas clave que determinan la forma en que se organiza y genera el conocimiento dentro de esa disciplina. Esto implica que "para ser coherentes", un conjunto de estándares debe evolucionar de particulares (p. ej., el significado y operaciones de números enteros, incluyendo operaciones matemáticas simples y procedimientos de cálculo rutinarios asociados con números enteros y fracciones) hasta estructuras más profundas, inherentes en la disciplina. Entonces estas estructuras más simples sirven como un medio para conectar los particulares (como un entendimiento del sistema de números racionales y sus propiedades). (énfasis agregado)

Estos Estándares se esfuerzan por apegarse a tal diseño, no solo al enfatizar la comprensión conceptual, sino también al volver continuamente a los principios de la organización como el valor posicional o las leyes de la aritmética para estructurar dichas ideas.

Además, la “secuencia de temas y actividades” detallada en un cuerpo de estándares en matemáticas también debe respetar lo que se sabe sobre la forma en que aprenden los estudiantes. Como ha señalado Confrey (2007), desarrollar “obstáculos y desafíos secuenciados para los estudiantes... en ausencia de los puntos de vista sobre significado que se derivan de un cuidadoso estudio del aprendizaje sería desafortunado e imprudente”. En reconocimiento de esto, el desarrollo de estos Estándares inició con progresiones de aprendizaje basadas en investigación detallando lo que se conoce actualmente sobre la forma en se desarrollan el conocimiento, habilidad y comprensión matemática de los estudiantes a través del tiempo.

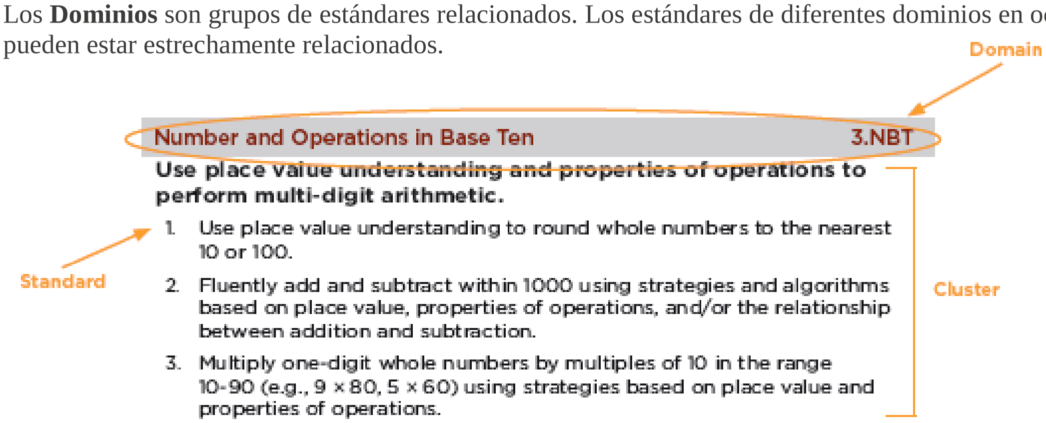
Comprendiendo las matemáticas

Estos Estándares definen lo que los estudiantes deberían comprender y ser capaces de hacer en su estudio de las matemáticas. Pedir al estudiante comprender algo significa pedir al profesor evaluar si el estudiante lo ha comprendido. ¿Pero cómo luce la comprensión matemática? Un distintivo de la comprensión matemática es la habilidad para justificar, de una manera apropiada para la madurez matemática del estudiante, por qué una afirmación matemática determinada es verdadera o el origen de una regla matemática. Hay un mundo de diferencia entre un estudiante que puede convocar un recurso mnemotécnico para expandir un producto como $(a + b)(x + y)$ y un estudiante que puede explicar el origen del recurso. El estudiante que puede explicar la regla comprende las matemáticas y puede tener una mejor oportunidad para el éxito en una tarea menos familiar como la expansión $(a + b + c)(x + y)$. La comprensión matemática y habilidad de procedimiento son igualmente importantes y ambas son evaluables usando tareas matemáticas suficientemente variadas.

Los Estándares establecen estándares específicas para el grado pero no definen los métodos o materiales de intervención necesarios para ayudar a los estudiantes que se encuentren muy por debajo o por encima de las expectativas del nivel de grado. También está más allá del alcance de los Estándares definir el rango completo de los apoyos apropiados para los aprendices del idioma inglés y para estudiantes con capacidades diferentes. Al mismo tiempo, todos los estudiantes deben tener la oportunidad de aprender y cumplir los mismos estándares elevados si han de acceder al conocimiento y habilidades necesarias en sus vidas postescolares. Los Estándares deben interpretarse como permitiendo participación plena de la gama de estudiantes más amplia posible desde el inicio, en conjunto con las adaptaciones correspondientes para garantizar la participación máxima de estudiantes con necesidades especiales de educación. Por ejemplo, para estudiantes con discapacidades de lectura se debe permitir el uso del Braille, tecnología de lector de pantalla u otros dispositivos de asistencia, mientras que la escritura debe incluir el uso de un escribano, computadora o tecnología de voz a texto. En una línea similar, la expresión oral y comprensión auditiva debe interpretarse ampliamente para incluir el lenguaje de señas. Ningún conjunto de estándares específicos para el grado pueden reflejar plenamente la gran variedad de habilidades, necesidades, velocidades de aprendizaje y niveles de aprovechamiento de los estudiantes en cualquier salón de clase. Sin embargo, los Estándares ofrecen señales claras a lo largo del camino hacia la meta de la universidad y preparación profesional para todos los estudiantes. Los estándares comienzan aquí con ocho Estándares para la Práctica matemática.

Cómo leer los estándares de nivel de grado

Los **Estándares** definen lo que los estudiantes deberían comprender y ser capaces de hacer.
Los **Grupos** resumen grupos de estándares relacionados. Considere que estándares de diferentes grupos en ocasiones pueden estar estrechamente relacionados, ya que las matemáticas son un tema vinculado.
Los **Dominios** son grupos de estándares relacionados. Los estándares de diferentes dominios en ocasiones pueden estar estrechamente relacionados.



Estos Estándares no dictan el programa de estudios ni los métodos de enseñanza. Por ejemplo, solo porque el tema A aparece antes del tema B en los estándares para un grado determinado, no necesariamente significa que el tema A deba impartirse antes del tema B. Un profesor puede preferir impartir el tema B antes que el tema A, o puede elegir destacar las relaciones al impartir el tema A y el tema B al mismo tiempo. O, un profesor puede preferir impartir un tema de su propia elección que como resultado lleve a los estudiantes a alcanzar los estándares para los temas A y B.

Lo que los estudiantes pueden aprender en cualquier nivel de grado determinado depende de lo que han aprendido antes. Lo ideal entonces es que cada estándar en este documento se redacte en la forma, “Los estudiantes que ya sepan A, luego continuación deben aprender B”. Pero actualmente este enfoque no es realista, sobre todo porque la investigación de educación existente no pude especificar todas estas vías formativas. Por lo tanto, por necesidad, las colocaciones de grado para temas específicos se han hecho en base a las comparaciones estatales e internacionales y la experiencia colectiva y juicio profesional colectivo de educadores, investigadores y matemáticos. Una promesa de los estándares estatales comunes es que con el tiempo permitirán investigación sobre progresiones de lectura para informar y mejorar el diseño de los estándares en una medida mucho mayor que la que es actualmente posible. Las oportunidades de aprendizaje continuarán variando a través de las escuelas y sistemas escolares, y los educadores escolares deben esforzarse por satisfacer las necesidades de estudiantes individuales en base a su comprensión actual.

Estos Estándares no tienen por intención ser nombres nuevos para métodos viejos. Son un llamado para tomar el siguiente paso. Es hora que los estados trabajen en conjunto para complementar las lecciones aprendidas d dos décadas de reformas basadas en estándares. Es hora de reconocer que estos estándares no solo son promesas a nuestros niños, sino promesas que tenemos la intención de cumplir.

Matemáticas: Estándares para práctica matemática

Los Estándares para la Práctica matemática describen variedades de experiencia que los educadores de matemáticas en todos los niveles deben buscar desarrollaren sus estudiantes. Estas prácticas se basan en importantes “procesos y competencias” con importancia en la educación matemática desde hace mucho tiempo Los primeros de ellos son los estándares de proceso del NCTM de resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, representación y relaciones. Los segundos son los aspectos de competencia matemática especificados en el informe *Adding it Up* del Consejo Nacional de Investigación: razonamiento adaptativo, competencia estratégica, comprensión conceptual (comprensión de conceptos matemáticos, operaciones y relaciones), fluidez de procedimiento (habilidad en la realización de procedimientos de manera flexible, precisa, eficiente y apropiada),y disposición productiva (inclinación habitual para ver las matemáticas como sensibles, útiles y que valen la pena, en conjunto con una creencia en la diligencia y de la eficacia propia).

1. Dar sentido a los problemas y perseverar para solucionarlos.

Los estudiantes matemáticamente competentes comienzan por explicarse el significado de un problema y buscando puntos de entrada a su solución. Analizan determinados, limitaciones, relaciones y objetivos. Hacen conjeturas sobre la forma y significado de la solución y planifican una vía de solución en vez de simplemente ir a un intento de solución. Consideran problemas análogos e intentan casos especiales y formas más simples del problema original para obtener una idea de su solución. Supervisan y evalúan su progreso y cambian de curso si es necesario. Los estudiantes mayores, dependiendo del contexto del problema, deben transformar expresiones algebraicas o cambiar la ventana de visualización en su calculadora gráfica para obtener la información que necesitan. Los estudiantes matemáticamente competentes pueden explicar correspondencias entre ecuaciones, descripciones verbales, tablas y gráficos o dibujar diagramas de características y relaciones importantes, graficar datos y buscar regularidad o tendencias. Los estudiantes más jóvenes pueden depender del uso de objetos o imágenes concretas para ayudar a conceptualizar y resolver un problema. Los estudiantes matemáticamente competentes verifican sus respuestas a los problemas usando un método diferente y constantemente se preguntan: “¿Esto tiene sentido?”. Pueden comprender los métodos de otras personas para resolver problemas complejos e identificar correspondencias entre diferentes métodos.

2. Razonar de manera abstracta y cuantitativa.

Los estudiantes matemáticamente competentes razonan las cantidades y sus relaciones en situaciones de problemas. Reflexionan respecto a dos habilidades complementarias que involucran relaciones cuantitativas: la habilidad para *descontextualizar*, es decir, abstraer una situación determinada y representarla simbólicamente y manipular los símbolos representantes como si tuvieran vida propia, sin atender a los referentes necesariamente; y la capacidad de *contextualizar*, para detenerse conforme sea necesario durante el proceso de manipulación a fin de indagar en los referentes para los símbolos involucrados. El razonamiento cuantitativo conlleva hábitos de ceración de una representación coherente del problema en cuestión; considerando las unidades involucradas; atendiendo al significado de las cantidades, no solo cómo calcularlas; y conocer y usar de manera flexible diferentes propiedades de operaciones y objetos.

3. Generar argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.

Los estudiantes matemáticamente competentes comprenden y emplean supuestos, definiciones y resultados previamente establecidos en la generación de argumentos. Hacen conjeturas y generan una progresión lógica de afirmaciones para explorar la veracidad de sus conjeturas. Son capaces de analizar situaciones al dividirlas en casos y pueden reconocer y usar contraejemplos. Justifican sus conclusiones, se las comunican a otros y responden a los argumentos de otros. Razonan los datos inductivamente, haciendo argumentos plausibles que toman en cuenta el contexto del que surgieron los datos. Los estudiantes matemáticamente competentes también son capaces de comparar la efectividad de dos argumentos plausibles, distinguir la lógica o razonamiento correcto del equivocado, y, de existir un error en un argumento, explicarlo. Los estudiantes de primaria pueden articular argumentos usando referentes concretos como objetos, dibujos, diagramas y acciones. Dichos argumentos pueden tener sentido y ser correctos, aunque no son generalizados ni formalizados hasta grados posteriores. Más tarde los estudiantes aprenden a determinar dominios para los que aplica un argumento. Los estudiantes en todos los grados pueden escuchar o leer los argumentos de otros, decidir si tienen sentido y hacer preguntas útiles para aclarar o mejorar los argumentos.

4. Modelar con matemáticas.

Los estudiantes matemáticamente competentes pueden aplicar las matemáticas que conocen para resolver problemas que surgen en la vida cotidiana, en la sociedad y en el lugar de trabajo. En los primeros grados esto puede ser tan simple como escribir una ecuación de suma para describir una situación. En los grados intermedios, un estudiante puede aplicar razonamiento proporcional para planificar un evento escolar o analizar un problema en la comunidad. En el nivel de secundaria, el estudiante puede usar geometría para resolver un problema de diseño o usar una función para describir cómo una cantidad de interés depende de otra. Los estudiantes matemáticamente competentes quienes sean capaces de aplicar lo que saben se sienten cómodos haciendo supuestos y aproximaciones para simplificar una situación complicada, a sabiendas que pueden requerir de revisión en el futuro. Son capaces de identificar importantes cantidades en una situación práctica y graficar sus relaciones usando herramientas como diagramas, tablas de dos vías, gráficos, diagramas de flujo y fórmulas. Pueden analizar dichas relaciones matemáticas para sacar conclusiones. Interpretan sus resultados matemáticos rutinariamente en el contexto de la situación y reflejar sobre si los resultados tienen sentido, posiblemente mejorando el modelo si éste no ha servido su propósito.

5. Usar las herramientas adecuadas estratégicamente.

Los estudiantes matemáticamente competentes consideran las herramientas disponibles al resolver un problema matemático. Estas herramientas pueden incluir lápiz y papel, modelos concretos, una regla, un transportador, una calculadora, una hoja de cálculo, un sistema de álgebra computacional, un paquete estadístico o un sistema de software de geometría dinámico. Los estudiantes competentes están suficientemente familiarizados con las herramientas apropiadas para su grado o curso para tomar decisiones sólidas sobre el caso en que cada una de estas herramientas puede ser de utilidad, reconociendo tanto el conocimiento que se alcanzará como sus limitaciones. Por ejemplo, estudiantes matemáticamente competentes de escuela secundaria analizan gráficos de funciones y soluciones generadas usando una calculadora gráfica. Detectan posibles errores al usar la estimación y otros conocimientos matemáticos de forma estratégica. Al realizar modelos matemáticos, saben que la tecnología puede permitirles visualizar los resultados de varios supuestos, explorar consecuencias y comparar predicciones con datos. Los estudiantes matemáticamente competentes en varios niveles de grado pueden identificar recursos matemáticos externos relevantes, como contenido digital ubicado en el sitio web y usarlos para plantear o resolver problemas. Son capaces de usar herramientas tecnológicas para explorar y profundizar su comprensión de los conceptos.

6. Prestar atención a la precisión.

Los estudiantes matemáticamente competentes intentan comunicarse con precisión. Intentan usar definiciones claras en sus discusiones con otros y en su propio razonamiento. Asimismo, indican el significado de los símbolos que eligen, incluyendo el uso del signo de igual de forma consistente y apropiada. Tienen cuidado de especificar las unidades de medida y rotular ejes para aclarar la correspondencia con cantidades en un problema. Hacen cálculos de manera precisa y eficiente, expresan respuestas numéricas con un grado de precisión apropiado para el contexto del problema. En los grados de primaria, los estudiantes ofrecen explicaciones formuladas cuidadosamente. Al llegar a la escuela secundaria han aprendido a analizar afirmaciones y hacer uso explícito de las definiciones.

7. Buscar y hacer uso de la estructura.

Los estudiantes matemáticamente proficientes prestan atención para identificar un patrón o estructura. Por ejemplo, los estudiantes jóvenes podrían notar que tres y siete más es la misma cantidad que siete y tres más, o pueden ordenar una colección de figuras de acuerdo a la cantidad de lados que tienen. Más tarde los estudiantes verán 7×8 es igual al bien recordado $7 \times 5 + 7 \times 3$, en preparación para aprender sobre la propiedad distributiva. En la expresión $x^2 + 9x + 14$, los estudiantes pueden ver al 14 como 2×7 y al 9 como $2 + 7$. Reconocen la importancia de una línea existente en una figura geométrica y pueden usar la estrategia de dibujar una línea auxiliar para resolver problemas. También pueden dar un paso atrás para una visión general y cambio de perspectiva. Pueden ver cosas complicadas, como algunas expresiones algebraicas, como objetos simples o como compuestos de varios objetos. Por ejemplo pueden ver $5 - 3(x - y)^2$ como 5 menos un número positivo por un cuadrado y usarlo para deducir que su valor no puede ser mayor que 5 para números reales x o y.

8. Buscar y expresar regularidad en el razonamiento repetido.

Los estudiantes matemáticamente competentes se dan cuenta si los cálculos están repetidos y buscan métodos generales y atajos. Los estudiantes de primaria mayor pueden notar que al dividir 25 entre 11 están repitiendo los mismos cálculos una y otra vez y concluir que tienen un decimal periódico. Al prestar atención al cálculo de una pendiente mientras revisan varias veces si los puntos están en la línea transversal (1, 2) con pendiente 3, los estudiantes de escuela intermedia podrían abstraer la ecuación $(y - 2)/(x - 1) = 3$. Notar la regularidad en la forma en que los términos se cancelan al expandirse $(x - 1)(x + 1)$, $(x - 1)(x^2 + x + 1)$, and $(x - 1)(x^3 + x2 + x + 1)$ puede llevarles a la fórmula general para la suma de series geométricas. Conforme trabajan para resolver un problema, los estudiantes matemáticamente competentes mantienen control del proceso mientras prestan atención a los detalles. Continuamente evalúan la razonabilidad de sus resultados intermedios.

Conectar los estándares para práctica matemática con los estándares para contenido Matemático

Los Estándares para práctica matemática describen formas en que los practicantes de la disciplina de las matemáticas en desarrollo deben involucrarse en el tema cada vez más conforme aumenta su madurez y experiencia matemática a lo largo de los años de escolares de primaria, intermedia y secundaria. Los diseñadores del programa de estudios, evaluaciones y desarrollo deben prestar atención a la necesidad de relacionar las prácticas matemáticas con el contenido en la enseñanza de matemáticas.

Los Estándares de contenido matemático son una combinación equilibrada de procedimiento y comprensión. Las expectativas que comienzan con la palabra “comprender” a menudo son oportunidades especialmente buenas para relacionar las prácticas con el contenido. Los estudiantes que carecen de comprensión sobre un tema pueden depender demasiado de los procedimientos. Sin una base flexible desde la cual trabajar, es menos probable que consideren problemas análogos, representen problemas de forma coherente, justifiquen conclusiones, apliquen matemáticas a situaciones prácticas, usen tecnología de manera consciente para trabajar con las matemáticas, explique las matemáticas de manera precisa a otros estudiantes, den un paso atrás para una vista general o se desvíen de un procedimiento conocido para encontrar un atajo. En resumen, una falta de comprensión efectivamente evita que un estudiante se involucre en las prácticas matemáticas.

En este respecto, dichos estándares de contenido que establecieron una expectativa de comprensión son “puntos de intersección” potenciales entre el los Estándares de contenido matemático y los Estándares para práctica matemática. Se pretende que estos puntos de intersección sean ponderados hacia conceptos centrales y generativos en el programa de estudios de matemáticas de la escuela que más ameriten el tiempo, los recursos, energías innovadoras y concentración necesaria para mejorar de forma cualitativa el programa de estudios, la enseñanza, la evaluación, el desarrollo profesional y el aprovechamiento del estudiante en matemáticas.

Matemáticas - Pre-Kindergarten: Introducción

En el Pre-Kindergarten, el tiempo de instrucción debe enfocarse en tres áreas cruciales: (1) desarrollar una comprensión de los números enteros usando materiales concretos, incluyendo conceptos de correspondencia, conteo, cardinalidad y comparación; (2) describir las figuras en sus alrededores. Debe dedicarse un mayor tiempo de aprendizaje al desarrollo del concepto del número más que a otros temas en Pre-Kindergarten.

(1) Los estudiantes desarrollan una comprensión de los significados de los números enteros y reconocen el número de objetos en grupos pequeños mediante el conteo, el primer algoritmo matemático y el más básico. Comprenden que las palabras de número se refieren a la cantidad. Usan la correspondencia uno a uno para resolver problemas al igualar conjuntos y comparar cantidades de números y en contar objetos hasta el 10. Comprenden que el último número que dicen al contar indica "cuántos" y cuentan para determinar cantidades en números y comparar cantidades (usando lenguaje como "más que" y "menos que").

(2) Los estudiantes describen el mundo físico usando ideas geométricas (p. ej., figuras y relaciones especiales) y vocabulario. Identifican y nombran figuras bidimensionales básicas, como triángulos, rectángulos, cuadrados y círculos. Usan figuras básicas y razonamiento espacial para modelar objetos en su entorno.

Prácticas matemáticas

1. Dar sentido a los problemas y perseverar para solucionarlos.
2. Razonar de manera abstracta y cuantitativa.
3. Generar argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.
4. Hacer modelos matemáticos.
5. Usar las herramientas adecuadas estratégicamente.
6. Prestar atención a la precisión.
7. Buscar y hacer uso de la estructura.
8. Buscar y expresar regularidad en el razonamiento repetido.

Contenido general del Grado PK

Conteo y cardinalidad
- Conocer los nombres de los números y la secuencia de conteo.
- Contar para indicar el número de objetos.
- Comparar números.

Operaciones y pensamiento algebraico
- Comprender la adición como sumar y comprender la sustracción como restar. Comprender patrones simples.

Medición y datos
- Describir y comparar atributos mensurables.
- Ordenar objetos y contar el número de objetos en cada una de las categorías.

Geometría
- Identificar y describir formas (cuadrados, círculos, triángulos, rectángulos).
- Analizar, comparar y ordenar objetos.

Conteo y cardinalidad PK.CC

Conocer los nombres de los números y la secuencia de conteo.

1. Contar hasta el 20.
2. Representar un número de objetos con un numeral escrito 0–5 (en donde el 0 representa un conteo de ningún objeto).

Contar para indicar el número de objetos.

3. Comprender la relación entre números y cantidades hasta el 10. Relacionar el conteo con la cardinalidad.
   a. Al contar objetos, indicar los nombres de los números en el orden estándar, igualando cada objeto con un número y solo uno, y cada nombre de número con un objeto y solo uno.
   b. Comprender que el último nombre de número dicho indica el número de objetos contado. El número de objetos es el mismo independientemente de su organización o el orden en que se contaron.
   c. Comprender que cada nombre de número sucesivo se refiere a una cantidad que es uno más grande.
4. Contar para responder preguntas tipo "¿cuántos?" sobre una cantidad de objetos hasta el 10 dispuestos en una línea, un conjunto rectangular o un círculo, o tantas como 5 cosas en una configuración dispersa. Dado un número del 1–10, contar esa misma cantidad de objetos.

Comparar números.

5. Identificar si el número de objetos en un grupo es más, menos, mayor que, menor que y/o igual al número de objetos en otro grupo, p. ej., usando estrategias de igualación y conteo.1 (1: hasta 5 objetos)
6. Identificar "primero" y "último" en relación al orden o la posición.

Operaciones y pensamiento algebraico PK.OA

Comprender la adición como sumar y comprender la sustracción como restar.

1. Demostrar una comprensión de la adición y la substracción usando objetos, dedos o respondiendo a situaciones prácticas (p. ej., Si tenemos 3 manzanas y agregamos dos más, ¿cuántas manzanas tenemos en conjunto?).

Comprender patrones simples.

2. Duplicar y extender (p. ej. ¿Qué sigue?) patrones simples usando objetos concretos.

Medición y datos PK.MD

Describir y comparar atributos mensurables.

1. Identificar atributos mensurables de objetos, como longitud y peso. Describirlos usando vocabulario (p. ej., pequeño, grande, bajo, alto, vacío, lleno, pesado y ligero).

Ordenar objetos y contar el número de objetos en cada categoría.

2. Ordenar objetos en categorías. Contar los números de objetos en cada categoría. 1 (limitar los conteos de categorías para ser menores o iguales que 10)

Geometría PK.G

Identificar y describir formas (cuadrados, círculos, triángulos, rectángulos).

1. Describir objetos en el entorno usando los nombres de las figuras y describir las posiciones relativas de estos objetos usando términos como superior, inferior, arriba, abajo, en frente, detrás, sobre, bajo y al lado.
2. Nombrar las figuras correctamente independientemente del tamaño.

Analizar, comparar y ordenar objetos.

3. Analizar, comparar y organizar figuras y objetos bidimensionales y tridimensionales, en diferentes tamaños, usando lenguaje informal para describir sus similitudes, diferencias y otros atributos (p. ej. color, tamaño y forma).
4. Crear y formar figuras de componentes (p. ej. palitos y bolas de arcilla).

Matemáticas - Kindergarten: Introducción

En Kindergarten, el tiempo de instrucción debe enfocarse en tres áreas cruciales: (1) representar y comparar números enteros, inicialmente con conjuntos de objetos; (2) describir formas y espacio. Debe dedicarse un mayor tiempo de aprendizaje al desarrollo del concepto del número más que a otros temas en Kindergarten.

1. Los estudiantes usan números, incluyendo numerales escritos para representar cantidades y resolver problemas cuantitativos, como contar objetos en un conjunto, contar un número de objetos determinado, comparar conjuntos o numerales y modelar simples situaciones de unir y separar con conjuntos de objetos o eventualmente con ecuaciones como $5 + 2 = 7$ y $7 – 2 = 5$. (Los estudiantes de Kindergarten deben ver ecuaciones de suma y resta. Se recomienda la escritura de ecuaciones por los estudiantes en Kindergarten, pero no es obligatoria.) Los estudiantes eligen, combinan y aplican estrategias efectivas para responder preguntas cuantitativas, incluyendo reconocer rápidamente las cardinalidades de pequeños conjuntos de objetos, contar y producir conjuntos de tamaños determinados, contar el número de objetos en conjuntos combinados, o contar el número de objetos que restan en un conjunto después de que se han quitado algunos.

2. Los estudiantes describen su mundo físico usando ideas geométricas (p. ej., figuras, orientación, relaciones especiales) y vocabulario. Identifican, nombran y describen figuras bidimensionales básicas, como cuadrados, triángulos, círculos, rectángulos y hexágonos, presentadas en una variedad de formas (p. ej., con diferentes tamaños y orientaciones), así como figuras tridimensionales como cubos, conos, cilindros y esferas. Usan figuras básicas y razonamiento espacial para modelar objetos en su entorno y para construir formas más complejas.

Prácticas matemáticas

1. Dar sentido a los problemas y perseverar para solucionarlos.
2. Razonar de manera abstracta y cuantitativa.
3. Generar argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.
4. Hacer modelos matemáticos.
5. Usar las herramientas adecuadas estratégicamente.
6. Prestar atención a la precisión.
7. Buscar y hacer uso de la estructura.
8. Buscar y expresar regularidad en el razonamiento repetido.

Contenido general del Grado K

Conteo y cardinalidad
- Conocer los nombres de los números y la secuencia de conteo.
- Contar para indicar el número de objetos.
- Comparar números.

Operaciones y pensamiento algebraico
- Comprender la adición como unir y sumar y comprender la sustracción como quitar y restar.

Números y operaciones en base diez
- Trabajar con números 11–19 para obtener las bases para el valor posicional.

Medición y datos
- Describir y comparar atributos mensurables.
- Clasificar objetos y contar el número de objetos en las categorías.

Geometría
- Identificar y describir formas.
- Analizar, comparar, crear y componer figuras.

Conteo y cardinalidad K.CC

Conocer los nombres de los números y la secuencia de conteo.

1. Contar hasta el 100 en unos y en dieces.
2. Contar progresivamente iniciando desde un número determinado dentro de la secuencia conocida (en vez de tener que empezar desde el 1).
3. Escribir los números del 0 al 20. Representar un número de objetos con un numeral escrito 0-20 (en donde el 0 representa un conteo de ningún objeto).

Contar para indicar el número de objetos.

4. Comprender la relación entre números y cantidades. Relacionar el conteo con la cardinalidad.
   a. Al contar objetos, indicar los nombres de los números en el orden estándar, igualando cada objeto con un número y solo uno, y cada nombre de número con un objeto y solo uno.
   b. Comprender que el último nombre de número dicho indica el número de objetos contado. El número de objetos es el mismo independientemente de su organización o el orden en que se contaron.
   c. Comprender que cada nombre de número sucesivo se refiere a una cantidad que es uno más grande.
   d. *Desarrollar una comprensión de los números ordinales (primero al décimo) para describir la posición relativa y magnitud de los números enteros.*
5. Contar para responder preguntas tipo "¿cuántos?" sobre una cantidad de objetos hasta el 20 dispuestos en una línea, un conjunto rectangular o un círculo, o tantas como 10 cosas en una configuración dispersa. Dado un número del 1–20, contar esa misma cantidad de objetos.

Comparar números.

6. Identificar si el número de objetos en un grupo es mayor que, menor que o igual al número de objetos en otro grupo, p. ej., usando estrategias de igualación y conteo.[1]
7. Comparar dos números entre el 1 y el 10 presentados como numerales escritos.

[1] Incluir grupos con hasta diez objetos.

Operaciones y pensamiento algebraico K.OA

Comprender la adición como unir y sumar y comprender la sustracción como quitar y restar.

1. Representar la adición y sustracción con objetos, dedos, imágenes mentales, dibujos[1], sonidos (p. ej., aplausos), interpretación de situaciones, explicaciones verbales, expresiones o ecuaciones.
2. Resolver problemas escritos de adición y sustracción y sumar y restar dentro del rango hasta el 10, p. ej., al usar objetos o dibujos para representar el problema.
3. Descomponer números menores que o iguales al 10 en pares en más de una forma, p. ej., usando objetos o dibujos, y hacer un registro de cada descomposición mediante un dibujo o una ecuación (p. ej., 5 = 2 + 3 and 5 = 4 + 1).
4. Para cualquier número del 1 al 9, encontrar el número que resulta en 10 al sumarse con el número dado, p. ej., usando objetos o dibujos, y hacer un registro de la respuesta con un dibujo o ecuación.
5. Sumar y restar con fluidez dentro del rango de los 5.

[1] Los dibujos no necesitan mostrar detalles, pero deben mostrar las matemáticas en el problema. (Esto aplica siempre que se mencionan dibujos en los Estándares.)

Número y operaciones en base diez K.NBT

Trabajar con números 11-19 para obtener las bases para el valor posicional.

1. Componer y descomponer números del 11 al 19 en diez unos y algunos unos más, p. ej., usando objetos o dibujos, y hacer un registro de cada composición o descomposición mediante un dibujo o ecuación (como 18 = 10 + 8); comprender que estos números están compuestos de diez unos y uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho o nueve unos.

Medición y datos K.MD

Describir y comparar atributos mensurables.

1. Describir atributos mensurables de objetos, como longitud o peso. Describir varios atributos mensurables de un objeto único.
2. Comparar directamente dos objetos con un atributo mensurable en común, para ver cuál de los objetos tiene “menos”/“más” del atributo, y describir la diferencia. *Por ejemplo, comparar directamente las alturas de dos niños y describir a uno de los niños como más alto/más bajo.*

Clasificación objetos y conteo el número de objetos en cada categoría.

3. Clasificar objetos en categorías. Contar los números de objetos en cada categoría y ordenar las categorías por cuenta.[1]

[1] Limitar los conteos de categoría para ser menores o iguales que 10.

Geometría K.G

Identificación y descripción de formas (cuadrados, círculos, triángulos, rectángulos, hexágonos, cubos, conos, cilindros y esferas).

1. Describir objetos en el entorno usando los nombres de las figuras y describir las posiciones relativas de estos objetos usando términos como *arriba, abajo, a un lado, en frente, detrás* y *junto*.
2. Nombrar las figuras correctamente independientemente de sus orientaciones o tamaño general.
3. Identificar las figuras como bidimensionales (situado en un plano, “plano”) o tridimensional (“sólido”).

Analizar, comparar, crear y componer figuras.

4. Analizar y comparar figuras bidimensionales y tridimensionales, en diferentes tamaños y orientaciones, usando lenguaje informal para describir sus similitudes, diferencias, partes (p. ej. número de lados y vértices/“esquinas”) y otros atributos (p. ej., que tiene lados de igual longitud).
5. Modelar figuras en el mundo mediante la formación de figuras de componentes (p. ej. palitos y bolas de arcilla) y dibujar figuras.
6. Componer figuras simples para formar figuras más grandes. *Por ejemplo, “¿Puedes unir estos dos triángulos con lados completos tocándose entre sí para formar un rectángulo?”*

Matemáticas - 1.er Grado: Introducción

En el 1.er Grado, el tiempo de instrucción debe enfocarse en tres áreas cruciales: (1) desarrollar una comprensión de la adición, sustracción y estrategias de adición y sustracción dentro del rango de 20; (2) desarrollar una comprensión de las relaciones numéricas y el valor posicional de números enteros, incluyendo agrupar en dieces y unos; (3) desarrollar una comprensión de mediciones lineares y de la medición de longitudes como unidades de longitud de iteración; y (4) razonamiento sobre atributos y componer y descomponer figuras geométricas.

1. Los estudiantes desarrollan estrategias para sumar y restar números enteros en base a su trabajo anterior con números pequeños. Usan una variedad de modelos, incluyendo objetos discretos y modelos basados en longitud (p. ej., cubos conectados para formar longitudes), modelar situaciones de agregar, quitar, unir, separar y comparar para desarrollar significado para las operaciones de adición y sustracción, y desarrollar estrategias para resolver problemas aritméticos con estas operaciones. Los estudiantes comprenden las relaciones entre el conteo y la adición y sustracción (p. ej., sumar dos es lo mismo que contar dos). Usan propiedades de adición para sumar números enteros y para crear y usar estrategias cada vez más sofisticadas en base a estas propiedades (p. ej., “hacer dieces”) para resolver problemas de suma y resta dentro del rango de 20. Al comparar una variedad de estrategias de solución, los niños complementan su comprensión de la relación entre la suma y la resta.

2. Los estudiantes desarrollan, discuten y usan métodos eficientes, precisos y generalizables para sumar dentro del rango de 100 y restar múltiplos de 10. Comparan números enteros (por lo menos hasta el 100) para desarrollar una comprensión y resolver problemas que involucran sus tamaños relativos. Piensan en números enteros entre el 10 y el 100 en términos de dieces y unos (especialmente reconociendo los números 11 al 19 como compuestos de un diez y algunos unos). A través de actividades que complementan el sentido numérico, comprenden el orden de los números de conteo y sus magnitudes relativas.

3. Los estudiantes desarrollan una comprensión del significado y los procesos de medición, incluyendo conceptos subyacentes como la iteración (la actividad mental de complementar la longitud de un objeto con unidades del mismo tamaño) y el principio de transitividad para la medición indirecta.[1]

4. Los estudiantes componen y descomponen figuras planas o sólidas (p. ej., colocar dos triángulos juntos para hacer un cuadrilátero) y complementar la comprensión de relaciones parte-entero así como las propiedades de las figuras originales y compuestas. Conforme combinan figuras, las reconocen desde perspectivas y orientaciones diferentes, describen sus atributos geométricos y determinan la forma en que son similares y diferentes, para desarrollar las bases para la medición y para la comprensión temprana de las propiedades como la congruencia y la simetría.

[1] Los estudiantes deben aplicar el principio de la transitividad de la medición para hacer comparaciones indirectas, pero no es necesario usar este término técnico.

Prácticas matemáticas

1. Dar sentido a los problemas y perseverar para solucionarlos.
2. Razonar de manera abstracta y cuantitativa.
3. Generar argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.
4. Hacer modelos matemáticos.
5. Usar las herramientas adecuadas estratégicamente.
6. Prestar atención a la precisión.
7. Buscar y hacer uso de la estructura.
8. Buscar y expresar regularidad en el razonamiento repetido.

Información general de 1.er Grado

Operaciones y pensamiento algebraico
- Representar y resolver problemas de suma y resta.
- Comprender y aplicar las propiedades de las operaciones y la relación entre la adición y la sustracción.
- Sumar y restar dentro del rango de los 20.
- Trabajar con ecuaciones de suma y resta.

Números y operaciones en base diez
- Extender la secuencia de conteo.
- Comprensión del valor posicional.
- Usar el conocimiento del valor posicional y las propiedades de las operaciones para sumar y restar.

Medición y datos
- Medir longitudes indirectamente e iterar unidades de longitud.
- Indicar y escribir la hora y dinero.
- Representar e interpretar datos.

Geometría
- Razonar con formas y sus atributos.

Operaciones y pensamiento algebraico 1.OA

Representar y resolver problemas de suma y resta.
1. Usar la suma y la resta dentro del rango de 20 para resolver problemas escritos que implican situaciones de agregar, quitar, unir, separar y comparar con desconocidos en todas las posiciones, p. ej., usando objetos, dibujos y ecuaciones con un símbolo para el número desconocido para representar el problema.[1]
2. Resolver problemas escritos que requieren de la suma de tres números enteros cuya suma es menor o igual que 20, p. ej., al usar objetos, dibujos y ecuaciones con un símbolo para el número desconocido para representar el problema.

Comprender y aplicar las propiedades de las operaciones y la relación entre la adición y la sustracción.
3. Aplicar las propiedades de las operaciones como estrategias para sumar y restar.[2] *Ejemplos: Si 8 + 3 = 11 es conocido, entonces 3 + 8 = 11 también es conocido. (Propiedad conmutativa de la adición.) Para sumar 2 + 6 + 4, los segundos dos números pueden sumarse para hacer un diez, entonces 2 + 6 + 4 = 2 + 10 = 12. (Propiedad asociativa de la adición.)*
4. Comprender la sustracción como un problema de sumando desconocido. *Por ejemplo, restar 10 – 8 al encontrar el número que compone 10 cuando se suma a 8. Sumar y restar dentro del rango de los 20.*

Sumar y restar dentro del rango de los 20.
5. Relacionar el conteo con la suma y la resta (p. ej., contando 2 para sumar 2).
6. Sumar y restar dentro del rango de los 20, demostrando fluidez para la suma y la resta dentro del rango de 10. Usar estrategias como el conteo consecutivo; haciendo diez (p. ej., 8 + 6 = 8 + 2 + 4 = 10 + 4 = 14); descomponer un número llevando a un diez (p. ej., 13 – 4 = 13 – 3 – 1 = 10 – 1 = 9); usar la relación entre la suma y la resta (p. ej., al saber que 8 + 4 = 12, uno sabe que 12 – 8 = 4); y crear sumas equivalentes conocidas o más fáciles (p. ej., sumar 6 + 7 al crear el equivalente conocido 6 + 6 + 1 = 12 + 1 = 13).

Trabajar con ecuaciones de suma y resta.
7. Comprender el significado del signo igual y determinar si las ecuaciones que involucran la suma y la resta son verdaderas o falsas. Por ejemplo, ¿cuál de las siguientes ecuaciones son verdaderas y cuáles son falsas? 6 = 6, 7 = 8 – 1, 5 + 2 = 2 + 5, 4 + 1 = 5 + 2.
8. Determinar el número entero desconocido en una ecuación de suma o de resta relacionando tres números enteros. *Por ejemplo, determinar el número desconocido que hace a la ecuación verdadera en cada una de las ecuaciones 8 + ? = 11, 5 = _ – 3, 6 + 6 = _.*

[1] Ver el Glosario, Tabla 1.
[2] No es necesario que los estudiantes usen términos formales para estas propiedades.

Número y operaciones en base diez 1.NBT

Extender la secuencia de conteo.

1. Contar hasta el 120, iniciando en cualquier número menor que 120. En este rango, leer y escribir numerales y representar un número de objetos con un numeral escrito.

Comprensión del valor posicional.

2. Comprender que ambos dígitos de un número de dos dígitos representan cantidades de dieces y unos. Comprender lo siguiente como casos especiales:
   a. Puede pensarse en el 10 como un grupo de diez unos, llamado un “diez”.
   b. Los números del 11 al 19 están compuestos de un diez y uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho o nueve unos.
   c. Los números 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 se refieren a uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho o nueve dieces (y 0 unos).
3. Comparar dos números de dos dígitos en base a significados de los dígitos de dieces y unos, registrando los resultados de comparaciones con los símbolos >, = y <.

Usar el conocimiento del valor posicional y las propiedades de las operaciones para sumar y restar.

4. Sumar dentro del rango de los 100, incluyendo sumar un número de dos dígitos y un número de un dígito y un múltiplo de 10, usando modelos o dibujos y estrategias concretas basados en el valor posicional, propiedades de las operaciones, y/o la relación entre la suma y la resta. Relacionar la estrategia con un método escrito y explicar el razonamiento utilizado. Comprender que en la suma de números de dos dígitos, sumamos dieces y dieces, unos y unos, y en ocasiones en necesario componer un diez.
5. Dado un número de dos dígitos, encontrar mentalmente 10 más o 10 menos que el número, sin tener que contar; explicar el razonamiento empleado.
6. Restar múltiplos de 10 en el rango 10-90 de múltiplos de 10 en el rango de 10-90 (diferencias positivas o cero), usando modelos o dibujos y estrategias concretas basados en el valor posicional, propiedades de las operaciones y/o la relación entre la suma y la resta; relacionar la estrategia con un método escrito y explicar el razonamiento utilizado.

Medición y datos 1.MD

Medir longitudes indirectamente e iterar unidades de longitud.

1. Ordenar tres objetos por longitud, comparar las longitudes de dos objetos indirectamente usando un tercer objeto.
2. Expresar la longitud de un objeto como un número entero de unidades de longitud, colocando varias copias de un objeto más corto (la unidad de longitud) de extremo a extremo. Comprender que la medición de longitud de un objeto es el número de unidades de longitud del mismo tamaño que lo cubren sin espacios ni superposiciones. *Limitar a contextos en donde el objeto medido es abarcado por un número entero de unidades de longitud sin espacios ni superposiciones.*

Indicar y escribir la hora *y dinero*.

3. Indicar y escribir la hora en horas y medias horas usando relojes análogos y digitales. *Reconocer e identificar monedas, sus nombres y su valor.*

Representar e interpretar datos.

4. Organizar, representar e interpretar datos con hasta tres categorías. Hacer y responder preguntas sobre el número total de puntos de datos, cuántos en cada categoría y cuántos más o menos están en una categoría que en otra.

Geometría 1.G

Razonar con formas y sus atributos.

1. Distinguir entre atributos que definen (p. ej., los triángulos son cerrados y tienen tres lados) y atributos que no definen (p. ej. color, orientación, tamaño general), formar y dibujar figuras para poseer atributos que definen.
2. Componer formas bidimensionales (rectángulos, cuadrados, trapezoides, triángulos, medios círculos y cuartos de círculos) o formas tridimensionales (cubos, prismas rectangulares rectos, conos circulares rectos, y cilindros circulares rectos) para crear una figura compuesta y componer formas nuevas de la figura compuesta.[1]
3. Dividir círculos y rectángulos en dos y cuatro partes iguales, describir las partes usando las palabras *mitades* y *cuartos* y usar las frases *la mitad de*, *un cuarto de* y *cuartos*. Describir el entero como dos de o cuatro de las partes. Comprender para estos ejemplos que descomponer en más partes iguales crea partes más pequeñas.

[1]Los estudiantes no tienen que aprender nombres formales como "prismas rectangulares rectos".

Matemáticas - 2.º Grado: Introducción

En el 2.º Grado, el tiempo de instrucción debe enfocarse en tres áreas cruciales: (1) ampliar la comprensión de la notación decimal; (2) elaborar fluidez con sumas y restas; (3) usar unidades de medición estándar; y (4) describir y analizar formas.

1. Los estudiantes amplían su comprensión del sistema decimal. Esto incluye ideas de contar en cincos, dieces y múltiplos de cientos, decenas y unidades, así como relaciones numéricas involucrando estas unidades, incluyendo comparación. Los estudiantes comprenden números de varios dígitos (hasta 1000) escritos en notación decimal, reconociendo que los dígitos en cada lugar representan cantidades de millardos, cientos, decenas o unidades (p. ej., 853 son 8 centenas + 5 decenas + 3 unidades).

2. Los estudiantes usan su comprensión de la adición para desarrollar fluidez con la adición y sustracción dentro del rango de 100. Resuelven problemas dentro del rango de 1000 al aplicar su comprensión de los modelos para la suma y la resta y desarrollan, discuten y usan métodos eficientes, precisos y generalizables para calcular sumas y diferencias de números enteros en notación decimal, usando su comprensión del valor posicional y las propiedades de las operaciones. Seleccionan y aplican de manera precisa métodos que son apropiados para el contexto y los números involucrados para calcular mentalmente las sumas y diferencias de números con solo decenas o solo unidades.

3. Los estudiantes reconocen la necesidad de unidades de medida estándar (centímetro y pulgada) y usan reglas y otras herramientas de medición con la comprensión que la medición linear implica una iteración de unidades. Reconocen que cuanto más pequeña la unidad más iteraciones necesitan para cubrir una longitud determinada.

4. Los estudiantes describen y analizan formas al estudiar sus lados y ángulos. Los estudiantes investigan, describen y razonan sobre la descomposición y combinación de formas para hacer otras formas. A través de formar, dibujar y analizar formas bidimensionales y tridimensionales, los estudiantes desarrollan una base para comprender el área, volumen, congruencia, similitud y simetría en grados posteriores.

Prácticas matemáticas

1. Dar sentido a los problemas y perseverar para solucionarlos.
2. Razonar de manera abstracta y cuantitativa.
3. Generar argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.
4. Hacer modelos matemáticos.
5. Usar las herramientas adecuadas estratégicamente.
6. Prestar atención a la precisión.
7. Buscar y hacer uso de la estructura.
8. Buscar y expresar regularidad en el razonamiento repetido.

Información general de 2.º Grado

Operaciones y pensamiento algebraico
- Representar y resolver problemas de suma y resta.
- Sumar y restar dentro del rango de los 20.
- Trabajar con números iguales de objetos para obtener las bases de la multiplicación.

Números y operaciones en base diez
- Comprensión del valor posicional.
- Usar el conocimiento del valor posicional y las propiedades de las operaciones para sumar y restar.

Medición y datos
- Medir y calcular las longitudes en unidades estándar.
- Relacionar la suma y la resta con la longitud.
- Trabajar con tiempo y dinero.
- Representar e interpretar datos.

Geometría
- Razonar con formas y sus atributos.

Operaciones y pensamiento algebraico 2.OA

Representar y resolver problemas de suma y resta.

1. Usar la suma y la resta dentro del rango de 100 para resolver problemas escritos de uno y dos pasos que impliquen situaciones de agregar, quitar, unir, separar y comparar con desconocidos en todas las posiciones, p. ej., usando objetos, dibujos y ecuaciones con un símbolo para el número desconocido para representar el problema.[1]

Sumar y restar dentro del rango de los 20.

2. Sumar y restar con fluidez dentro del rango de los 20 usando estrategias mentales.[2] Para el final del 2.º Grado, saber todas las sumas de dos números de un dígito de memoria.

Trabajar con números iguales de objetos para obtener las bases de la multiplicación.

3. Determinar si un grupo de objetos (hasta 20) tiene un número de miembros impar o par, p. ej., igualando objetos o contándolos en 2s. Escribir una ecuación para expresar un número par como una suma de dos sumandos iguales.
4. Usar la suma para encontrar el número total de objetos dispuestos en conjuntos rectangulares con hasta 5 filas y hasta 5 columnas. Escribir una ecuación para expresar el total como una suma de sumandos iguales.

[1]Ver el Glosario, Tabla 1.

[2]Ver estándar 1.OA.6 para una lista de estrategias mentales.

Número y operaciones en base diez 2.NBT

Comprensión del valor posicional.

1. Comprender que los tres dígitos de un número de tres dígitos representan cantidades de centenas, decenas y unidades, p. ej. 706 es igual a 7 centenas, 0 decenas y 6 unidades. Comprender lo siguiente como casos especiales:
    a. Puede pensarse en el 100 como un grupo de diez decenas, llamado un "cien".
    b. Los números 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900 se refieren a uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho o nueve centenas (y 0 dieces y 0 unos).
2. Contar dentro del rango de 1000, contar en serie en 5s, 10s y 100s.
3. Leer y escribir números hasta el 1000 usando numerales en base a diez, nombres de números y la forma expandida.
4. Comparar dos números de tres dígitos en base a significados de los dígitos de centenas, decenas y unidades, usando los símbolos >, =, < para registrar los resultados de las comparaciones.

Usar el conocimiento del valor posicional y las propiedades de las operaciones para sumar y restar.

5. Sumar y restar con fluidez dentro del rango de los 100 usando estrategias basadas en el valor posicional, propiedades de las operaciones y/o la relación entre la suma y la resta.
6. Sumar hasta cuatro números de dos dígitos usando estrategias basadas en el valor posicional y las propiedades de las operaciones.
7. Sumar y restar dentro del rango de los 1000 usando modelos y estrategias concretas basados en el valor posicional, propiedades de las operaciones y/o la relación entre la suma y la resta; relacionar la estrategia con un método escrito. Comprender que en la suma o resta de números de tres dígitos, sumamos y restamos centenas y centenas, decenas y decenas, unidades y unidades. Y en ocasiones es necesario componer o descomponer decenas y centenas.
8. Sumar mentalmente 10 o 100 a un número determinado entre 100 y 900, y restar mentalmente 10 o 100 de un número determinado entre 100 y 900.
9. Explicar por qué funcionan las estrategias de suma y resta, usando el valor posicional y las propiedades de las operaciones.[1]

[1] Las explicaciones pueden apoyarse con dibujos u objetos.

Medición y datos 2.MD

Medir y calcular las longitudes en unidades estándar.

1. Medir la longitud de un objeto seleccionando y usando herramientas apropiadas como reglas, yardas, metros y cintas de medir.
2. Medir la longitud de un objeto dos veces, usando unidades de longitud de diferentes longitudes para ambas mediciones. Describir cómo ambas mediciones se relacionan con el tamaño de la unidad elegida.
3. Calcular longitudes usando unidades de pulgadas, pies, centímetros y metros.
4. Medir cómo determinar la diferencia de longitud entre un objeto y otro, expresando la diferencia en términos de una unidad estándar de longitud.

Relacionar la suma y la resta con la longitud.

5. Usar la suma y la resta dentro del rango de 100 para resolver problemas escritos que impliquen longitudes proporcionadas en las mismas unidades, p. ej., usando dibujos (como dibujos de reglas) y ecuaciones con un símbolo para el número desconocido para representar el problema.
6. Representar números enteros como longitudes desde 0 en un diagrama de recta numérica con puntos equidistantes para los números 0, 1, 2, ..., y representar sumas de números enteros y diferencias dentro del rango de 100 en un diagrama de recta numérica.

Trabajar con tiempo y dinero.

7. Indicar y escribir la hora en relojes análogos y digitales hasta los cinco minutos más cercanos, usando a.m. y p.m.
8. Resolver problemas escritos involucrando billetes de un dólar, monedas de veinticinco centavos, diez centavos, cinco centavos y un centavo, usando los símbolos $ y ¢ correctamente. Ejemplo: Si tienes 2 monedas de diez centavos y 3 centavos, ¿cuántos centavos tienes?

Representar e interpretar datos.

9. Generar datos de medición al medir las longitudes de varios objetos hasta la unidad entera más cercana o al hacer varias mediciones del mismo objeto. Mostrar las mediciones haciendo un diagrama lineal, en donde la escala horizontal está marcada en unidades de números enteros.
10. Dibujar un gráfico de imágenes y un gráfico de barras (con una escala de una unidad) para representar un conjunto de datos con varias categorías. Resolver problemas simples de unir, separar y comparar[1] usando la información presentada en un gráfico de barras.

[1] Ver el Glosario, Tabla 1.

Geometría 2.G

Razonar con formas y sus atributos.

1. Reconocer y dibujar figuras con atributos especificados, como un número determinado de ángulos o un número determinado de caras iguales.[1] Identificar triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos y cubos.
2. Dividir un rectángulo en filas y columnas de cuadros del mismo tamaño y contar para encontrar el número total.
3. Dividir círculos y rectángulos en dos, tres y cuatro partes iguales, describir las partes usando las palabras mitades, tercios, medios, etc., y describir el entero como dos mitades, tres tercios, cuatro cuartos. Reconocer que las partes iguales de enteros idénticos no tienen que tener la misma forma.

[1] Los tamaños se comparan directamente o visualmente, no se comparan mediante la medición.

Matemáticas - 3.er Grado: Introducción

En el 3.er Grado, el tiempo de instrucción debe enfocarse en tres áreas cruciales: (1) desarrollo de la comprensión de la multiplicación y la división y las estrategias para la multiplicación y la división dentro del rango de 100; (2) desarrollo de la comprensión de fracciones, especialmente fracciones unitarias (fracciones con el numerador 1); (3) desarrollo de la comprensión de la estructura de conjuntos rectangulares y de área; y (4) descripción y análisis de formas bidimensionales.

1. Los estudiantes desarrollan una comprensión de los significados de la multiplicación y de la división de números enteros a través de actividades y problemas que involucran grupos, conjuntos y modelos de área del mismo tamaño. La multiplicación es encontrar un producto desconocido y la división es encontrar un factor desconocido en estas situaciones. Para situaciones de grupos del mismo tamaño, la división puede requerir encontrando el número desconocido de grupos o el tamaño de grupo desconocido. Los estudiantes usan las propiedades de las operaciones para calcular productos de números enteros, usando estrategias cada vez más sofisticadas basadas en estas propiedades para resolver problemas de multiplicación y división con factores de un dígito. Al comparar una variedad de estrategias de solución, los estudiantes aprenden la relación entre la multiplicación y la división.

2. Los estudiantes desarrollan una comprensión de fracciones, iniciando con fracciones unitarias. Los estudiantes perciben las fracciones en general como formadas por fracciones unitarias y usan fracciones junto con modelos de fracciones visuales para representar partes de un todo. Los estudiantes comprenden que el tamaño de una parte fraccional es relativa al tamaño del entero. Por ejemplo, 1/2 de la pintura en un balde pequeño podría ser menos pintura que 1/3 de la pintura en un balde más grande, pero 1/3 de un listón es más largo que 1/5 del mismo listón porque cuando el listón está dividido en 3 partes iguales, las partes son más largas que cuando el listón está dividido en 5 partes iguales. Los estudiantes pueden usar fracciones para representar números iguales que, menores que y mayores que uno. Resuelven problemas que implican la comparación de fracciones usando modelos de fracciones visuales y estrategias basadas en notar numeradores o denominadores iguales.

3. Los estudiantes reconocen el área como un atributo de regiones bidimensionales. Miden el área de una figura encontrando el número total de unidades con el mismo tamaño de área necesarias para cubrir la figura sin espacios ni superposiciones, un cuadrado con lados con la unidad de longitud de la unidad estándar para medir el área. Los estudiantes comprenden que los conjuntos rectangulares pueden descomponerse en filas o columnas idénticas. Al descomponer rectángulos en conjuntos rectangulares de cuadrados, los estudiantes relacional el área con la multiplicación y justifican el uso de la multiplicación para determinar el área de un rectángulo.

4. Los estudiantes describen, analizan y comparan las propiedades de figuras bidimensionales. Comparan y clasifican las figuras por sus lados y ángulos y los relacionan con definiciones de figuras. Los estudiantes también relacionan su trabajo de fracciones con la geometría al expresar el área de parte de una figura como una fracción de unidad del conjunto.

Prácticas matemáticas

1. Dar sentido a los problemas y perseverar para solucionarlos.
2. Razonar de manera abstracta y cuantitativa.
3. Generar argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.
4. Hacer modelos matemáticos.
5. Usar las herramientas adecuadas estratégicamente.
6. Prestar atención a la precisión.
7. Buscar y hacer uso de la estructura.
8. Buscar y expresar regularidad en el razonamiento repetido.

Información general de 3.^{er} Grado

Operaciones y pensamiento algebraico

- Representar y resolver problemas de multiplicación y división.
- Comprender las propiedades de la multiplicación y la relación entre la multiplicación y la división.
- Multiplicar y dividir dentro del rango de 100.
- Resolver problemas que involucran las cuatro operaciones y identificar y explicar patrones en aritmética.

Números y operaciones en base diez

- Usar el conocimiento del valor posicional y las propiedades de las operaciones para realizar operaciones aritméticas de varios dígitos.

Número y operaciones - Fracciones

- Desarrollar una comprensión de fracciones como números.

Medición y datos

- Resolver problemas relacionados con la medición y cálculo de intervalos de tiempo, volúmenes de líquidos y masas de objetos.
- Representar e interpretar datos.
- Medición geométrica: comprender los conceptos de área y relacionar el área a la multiplicación y la suma.
- Medición geométrica: reconocer el perímetro como un atributo de las figuras planas y distinguir entre las medidas lineales y de área.

Geometría

- Razonar con formas y sus atributos.

Operaciones y pensamiento algebraico 3.OA

Representar y resolver problemas de multiplicación y división.

1. Interpretar productos de números enteros, p. ej., interpretar 5 × 7 como el números total de objetos en 5 grupos de 7 objetos cada uno. *Por ejemplo, describir un contexto en el cual el número total de objetos puede expresarse como 5 × 7.*
2. Interpretar cocientes enteros de números enteros, p. ej., interpretar 56 ÷ 8 como el número de objetos en cada parte cuando 56 objetos se dividan equitativamente en 8 partes, o como un número de partes cuando 56 objetos se dividan en partes iguales de 8 objetos cada uno. *Por ejemplo, describir un contexto en el cual un número de partes o un número de grupos pueda expresarse como 56 ÷ 8.*
3. Usar la multiplicación y división dentro del rango de 100 para resolver problemas escritos que implican grupos iguales, conjuntos y cantidades de medición, p. ej., usando diagramas y ecuaciones con un símbolo para el número desconocido para representar el problema.[1]
4. Determinar el número entero desconocido en una ecuación de multiplicación o división relacionando tres números enteros. *Por ejemplo, determinar el número desconocido que hace a la ecuación verdadera en cada una de las ecuaciones 8 × ? = 48, 5 = _ ÷ 3, 6 × 6 = ?*

Comprender las propiedades de la multiplicación y la relación entre la multiplicación y la división.

5. Aplicar las propiedades de las operaciones como estrategias para multiplicar y dividir.[2] *Ejemplos: Si 6 × 4 = 24 es conocido, entonces 4 × 6 = 24 también es conocido. (Propiedad conmutativa de la multiplicación.) 3 × 5 × 2 puede encontrarse en 3 × 5 = 15, luego 15 × 2 = 30, o en 5 × 2 = 10, luego 3 × 10 = 30. (Propiedad asociativa de la multiplicación.) Sabiendo que 8 × 5 = 40 y 8 × 2 = 16, podemos encontrar 8 × 7 as 8 × (5 + 2) = (8 × 5) + (8 × 2) = 40 + 16 = 56. (Propiedad distributiva.)*
6. Comprender la división como un problema de factor desconocido. *Por ejemplo, encontrar 32 ÷ 8 al encontrar el número que hace 32 cuando se multiplica por 8.*

Multiplicar y dividir dentro del rango de 100.

7. Multiplicar y dividir con fluidez dentro del rango de 100, usando estrategias como la relación entre la multiplicación y la división (p. ej., al saber que 8 × 5 = 40, uno sabe que 40 ÷ 5 = 8) o las propiedades de las operaciones. Para el final del 3.er Grado, saber de memoria todos los productos de dos números de un dígito.

Resolver problemas que involucran las cuatro operaciones y identificar y explicar patrones en aritmética.

8. Resolver problemas escritos de dos pasos usando las cuatro operaciones. Representar estos problemas usando ecuaciones con una letra que significa la cantidad desconocida. Evaluar la razonabilidad de las respuestas usando el cálculo mental y estrategias de cálculo, incluyendo el redondeo.[3]
9. Identificar patrones aritméticos (incluyendo patrones en la tabla de suma o tabla de multiplicación) y explicarlos usando las propiedades de las operaciones. *Por ejemplo, observar que 4 por un número siempre es un par y explicar por qué 4 por un número puede descomponerse en dos sumandos iguales.*

[1] Ver el Glosario, Tabla 2.
[2] No es necesario que los estudiantes usen términos formales para estas propiedades.
[3] Este estándar está limitado a problemas planteados con números enteros y con respuestas de números enteros. Los estudiantes deben saber cómo realizar operaciones en el orden convencional cuando no haya paréntesis para especificar un orden determinado.

Número y operaciones en base diez 3.NBT

Usar el conocimiento del valor posicional y las propiedades de las operaciones para realizar operaciones aritméticas de varios dígitos.[1]

1. Usar el conocimiento del valor posicional para redondear números enteros al 10 o 100 más cercano.
2. Sumar y restar con fluidez dentro del rango de los 1000 usando estrategias y algoritmos basados en el valor posicional, propiedades de las operaciones y/o la relación entre la suma y la resta.
3. Multiplicar números enteros de un dígito por múltiplos de 10 en el rango entre 10 y 90 (p. ej., 9 × 80, 5 × 60) usando estrategias basadas en el valor posicional y las propiedades de las operaciones.

[1] Puede usarse una variedad de algoritmos.

Número y operaciones—Fracciones[1] 3.NF

Desarrollar una comprensión de fracciones como números.

1. Comprender una fracción 1/*b* como la cantidad formada por 1 parte cuando un entero *a* se divide en partes iguales *b*; comprender una fracción *a*/*b* como la cantidad formada por partes a de tamaño 1/*b*.
2. Comprender una fracción como un número en la recta numérica. Representar fracciones en un diagrama de recta numérica.
   a. Representar una fracción 1/*b* en un diagrama de recta numérica al definir el intervalo de 0 a 1 como el entero y dividirlo en partes iguales *b*. Reconocer que cada parte tiene un tamaño 1/*b* y que el punto final de la parte basada en 0 encuentra el número 1/*b* en la recta numérica.
   b. Representar una fracción *a/b* en un diagrama de recta numérica al marcar longitudes a 1/*b* desde 0. Reconocer que el intervalo resultante tiene un tamaño a/b y que su punto final ubica el número *a/b* en la recta numérica.
3. Explicar la equivalencia de las fracciones en casos especiales y comparar fracciones razonando su tamaño.
   a. Comprender dos fracciones como equivalentes (iguales) si son del mismo tamaño o el mismo punto en una recta numérica.
   b. Reconocer y generar fracciones equivalentes simples (p. ej., 1/2 = 2/4, 4/6 = 2/3). Explicar por qué las fracciones son equivalentes, por ejemplo, mediante el uso de un modelo de fracción visual.
   c. Expresar números enteros como fracciones, y reconocer las fracciones que son equivalentes a números enteros. *Ejemplos Expresar 3 en la forma 3 = 3/1; reconocer que 6/1 = 6; localizar 4/4 y 1 en el mismo punto de un diagrama de recta numérica.*
   d. Comparar dos fracciones con el mismo numerador o el mismo denominador razonando sobre su tamaño. Reconocer que las comparaciones son válidas solo cuando las dos fracciones se refieren al mismo entero. Registrar los resultados de las comparaciones con los símbolos >, = o <, y justificar las conclusiones, por ejemplo, mediante el uso de un modelo de fracción visual.

[1]Las expectativas de 3.er Grado en este dominio se limitan a fracciones con los denominadores 2, 3, 4, 6, 8.

Medición y datos 3.MD

Resolver problemas relacionados con la medición y cálculo de intervalos de tiempo, volúmenes de líquidos y masas de objetos.

1. Decir y escribir la hora al minuto más cercano y medir los intervalos de tiempo en minutos. Resolver problemas de suma y resta de intervalos de tiempo en minutos, por ejemplo, al representar el problema en un diagrama de recta numérica.
2. Medir y calcular los volúmenes de líquidos y las masas de objetos usando unidades estándar de gramos (g), kilogramos (kg) y litros (l).[1] Sumar, restar, multiplicar o dividir para resolver problemas escritos de un paso que incluyen masas o volúmenes mostrados en las mismas unidades, por ejemplo, mediante el uso de diagramas (como un matraz con una escala de medición) para representar el problema.[2]

Representar e interpretar datos.

3. Dibujar una gráfica de imágenes a escala y una gráfica de barras a escala para representar un conjunto de datos con varias categorías. Resolver problemas de uno y de dos pasos sobre "cuántos más" y "cuántos menos" usando información presentada en gráficas de barras a escala. *Por ejemplo, dibuja una gráfica de barras en la que cada cuadrado de la gráfica puede representar 5 mascotas.*
4. Generar datos de medición al medir longitudes utilizando reglas marcadas con medias pulgadas y cuartos de pulgada. Mostrar los datos al hacer una gráfica de líneas, donde la escala horizontal se marca en unidades apropiadas: números enteros, mitades o cuartos.

Medición geométrica: comprender los conceptos de área y relacionar el área a la multiplicación y la suma.

5. Reconocer el área como un atributo de las figuras planas y comprender conceptos de medición de área.
   a. Un cuadrado con longitud de lado de 1 unidad, llamada "un cuadrado de unidad", se dice que tiene "una unidad cuadrada" de área, y puede usarse para medir el área.
   b. Una figura plana, que puede estar cubierta sin vacíos y sin superponerse por *n* cuadrados de unidad, se dice que tiene un área de *n* unidades cuadradas.
6. Medir áreas contando cuadrados de unidades (cm cuadrados, m cuadrados m, in cuadradas, ft cuadrados y unidades improvisadas).
7. Relacionar el área a las operaciones de multiplicación y suma.
   a. Encontrar el área de un rectángulo con longitudes de lado de números enteros al usar mosaicos, y mostrar que el área es la misma que se encontraría multiplicando las longitudes de los lados.
   b. Multiplicar longitudes de los lados para encontrar áreas de rectángulos con longitudes de lados de números enteros, en el contexto de resolver problemas matemáticas y del mundo real, y representar productos de números enteros como áreas rectangulares en razonamiento matemático.
   c. Usar mosaicos para mostrar en un caso concreto que el área de un rectángulo con longitudes de lado de números enteros a y $b + c$ es la suma de $a \times b$ y $a \times c$. Usar modelos de área para representar la propiedad distributiva en el razonamiento matemático.
   d. Reconocer el área como aditiva. Encontrar áreas de figuras rectilíneas al descomponerlas en rectángulos que no se superponen y sumando las áreas de las partes que no se superponen, aplicando esta técnica para resolver problemas del mundo real.

Medición geométrica: reconocer el perímetro como un atributo de las figuras planas y distinguir entre las medidas lineales y de área.

8. Resolver problemas del mundo real y matemáticos que incluyen perímetros de polígonos, incluyendo encontrar el perímetro dado de las longitudes de los lados, encontrar una longitud desconocida de un lado, y mostrando rectángulos con el mismo perímetro y áreas diferentes o con la misma área y diferentes perímetros.

[1] Excluye unidades compuestas como cm3 y encontrar el volumen geométrico de un contenedor.
[2] Excluye problemas de comparación multiplicativa (problemas que involucran nociones de "por determinado número"; ver el Glosario, Tabla 2).

Geometría 3.G

Razonar con formas y sus atributos.

1. Comprender que las formas en diferentes categorías (por ejemplo, rombos, rectángulos y otros) pueden compartir atributos (por ejemplo, que tiene cuatro lados), y que los atributos compartidos pueden definir una categoría más amplia (por ejemplo, cuadriláteros). Reconocer rombos, rectángulos y cuadrados como ejemplos de cuadriláteros, y dibujar ejemplos de cuadriláteros que no pertenecen a ninguna de estas subcategorías.
2. Particionar formas en partes con áreas iguales. Expresar el área de cada parte como una fracción de unidad del conjunto. *Por ejemplo, particionar una forma en 4 partes con áreas iguales, y describir el área de cada parte como 1/4 del área de la forma.*

Matemáticas - 4.º Grado: Introducción

En el 4.º Grado, el tiempo de instrucción debe enfocarse en tres áreas cruciales: (1) desarrollar la comprensión y la fluidez con la multiplicación de varios dígitos, y desarrollar la comprensión de la división para encontrar cocientes que involucran dividendos de varios dígitos; (2) desarrollar la comprensión de la equivalencia de fracción, la suma y la resta de fracciones con denominadores comunes, y la multiplicación de fracciones por números enteros; (3) comprender que las figuras geométricas pueden analizarse y clasificarse según sus propiedades, como tener lados paralelos, lados perpendiculares, medidas de ángulos particulares y simetría.

1. Los estudiantes generalizan su comprensión del valor posicional hasta 1,000,000, entendiendo los tamaños relativos de números en cada lugar. Aplican su comprensión de los modelos para la multiplicación (grupos de igual tamaño, matrices, modelos de área), el valor posicional y las propiedades de las operaciones, en particular, la propiedad distributiva, a medida que desarrollan, discuten y utilizan métodos eficientes, precisos y generalizables para calcular productos de números enteros de varios dígitos. En función de los números y el contexto, seleccionan y aplican con precisión los métodos adecuados para estimar o calcular mentalmente los productos. Desarrollan fluidez con procedimientos eficientes para multiplicar números enteros; comprenden y explican por qué los procedimientos trabajan en base al valor posicional y las propiedades de las operaciones; y los usan para resolver problemas. Los estudiantes aplican su comprensión sobre modelos para la división, el valor posicional, las propiedades de operaciones, y la relación de la división a la multiplicación, a medida que desarrollan, discuten y utilizan procedimientos eficientes, precisos y generalizables para encontrar cocientes que involucran dividendos de varios dígitos. Seleccionan y aplican con precisión los métodos adecuados para estimar o calcular mentalmente los cocientes, e interpretar restos en base al contexto.

2. Los estudiantes desarrollan la comprensión de la equivalencia de fracciones y operaciones con fracciones. Reconocen que dos fracciones diferentes pueden ser iguales (por ejemplo, 15/9 = 5/3), y desarrollan métodos para generar y reconocer fracciones equivalentes. Los estudiantes amplían conocimientos previos sobre cómo las fracciones se generan a partir de fracciones de unidad, componiendo fracciones a partir de fracciones de unidad, deshaciendo fracciones a fracciones de unidad, y usando el significado de fracciones y el significado de multiplicación para multiplicar una fracción por un número entero.

3. Los estudiantes describen, analizan, comparan y clasifican formas bidimensionales. A través de la generación, elaboración y el análisis de formas bidimensionales, los estudiantes profundizan su conocimiento de las propiedades de objetos bidimensionales y los usan para resolver problemas de simetría.

Prácticas matemáticas

1. Dar sentido a los problemas y perseverar para solucionarlos.
2. Razonar de manera abstracta y cuantitativa.
3. Generar argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.
4. Hacer modelos matemáticos.
5. Usar las herramientas adecuadas estratégicamente.
6. Prestar atención a la precisión.
7. Buscar y hacer uso de la estructura.
8. Buscar y expresar regularidad en el razonamiento repetido.

Información general de 4.º Grado

Operaciones y pensamiento algebraico

- Usar las cuatro operaciones con números enteros para resolver problemas.
- Familiarizarse con factores y múltiplos.
- Generar y analizar patrones.

Números y operaciones en base diez

- Generalizar el conocimiento del valor posicional para números enteros de varios dígitos.
- Usar el conocimiento del valor posicional y las propiedades de las operaciones para realizar operaciones aritméticas de varios dígitos.

Número y operaciones - Fracciones

- Ampliar el conocimiento de la equivalencia de fracciones y el ordenamiento.
- Crear fracciones a partir de fracciones de unidad aplicando y ampliando los conocimientos previos de operaciones con números enteros.
- Comprender la notación decimal para fracciones y comparar fracciones decimales.

Medición y datos

- Resolver problemas que incluyen la medición y conversión de mediciones de una unidad más grande a una unidad más pequeña.
- Representar e interpretar datos.
- Medición geométrica: comprender los conceptos de ángulos y medir ángulos.

Geometría

- Dibujar e identificar líneas y ángulos, y clasificar formas por las propiedades de sus líneas y ángulos.

Operaciones y pensamiento algebraico 4.OA

Usar las cuatro operaciones con números enteros para resolver problemas.

1. Interpretar una ecuación de multiplicación como una comparación, por ejemplo, interpretar $35 = 5 \times 7$ como una afirmación de que 35 es 5 veces por 7, y 7 veces por 5. Representar afirmaciones verbales de comparaciones multiplicativas como ecuaciones de multiplicación.
2. Multiplicar o dividir para resolver problemas que implican la comparación multiplicativa, por ejemplo, mediante el uso de dibujos y ecuaciones con un símbolo para el número desconocido para representar el problema, distinguiendo la comparación multiplicativa de la comparación aditiva.[1]
3. Resolver problemas de varios pasos planteados con números enteros y generar respuestas de números enteros usando las cuatro operaciones, incluyendo problemas en que los restos deben interpretarse. Representar estos problemas usando ecuaciones con una letra que significa la cantidad desconocida. Evaluar la razonabilidad de las respuestas usando el cálculo mental y estrategias de cálculo, incluyendo el redondeo.

Familiarizarse con factores y múltiplos.

4. Buscar todos los pares de factores de un número entero en el rango de 1-100. Reconocer que un número entero es un múltiplo de cada uno de sus factores. Determinar si un número entero en el rango de 1-100 es un múltiplo de un determinado número de un dígito. Determinar si un número entero en el rango de 1–100 es un número primo o compuesto.

Generar y analizar patrones.

5. Generar un número o patrón de forma que sigue una regla determinada. Identificar las características aparentes del patrón que no eran explícitas en la regla misma. *Por ejemplo, en base a la regla "Sumar 3" y el número inicial 1, generar términos en la secuencia resultante y observar que los términos parecen alternarse entre números nones y pares. Explicar informalmente por qué los números continuarán alternándose de esta manera.*

[1] Ver el Glosario, Tabla 2.

Número y operaciones en base a diez[1] 4.NBT

Generalizar el conocimiento del valor posicional para números enteros de varios dígitos.

1. Reconocer que en un número entero de varios dígitos, un dígito en un lugar representa diez veces lo que representa en el lugar a su derecha. *Por ejemplo, reconocer que 700 ÷ 70 = 10 al aplicar conceptos de valor posicional y división.*
2. Leer y escribir números enteros de varios dígitos usando numerales en base a diez, nombres de números y la forma expandida. Comparar dos números de varios dígitos en base a significados de los dígitos en cada lugar, utilizando los símbolos >, =, < para registrar los resultados de las comparaciones.
3. Usar el conocimiento del valor posicional para redondear números enteros de varios dígitos a cualquier lugar.

Usar el conocimiento del valor posicional y las propiedades de las operaciones para realizar operaciones aritméticas de varios dígitos.

4. Sumar y restar con fluidez números enteros de varios dígitos utilizando el algoritmo estándar.
5. Multiplicar un número entero de hasta cuatro dígitos por un número entero de un dígito, y multiplicar dos números de dos dígitos, utilizando estrategias basadas en el valor posicional y las propiedades de las operaciones. Ilustrar y explicar el cálculo mediante el uso de ecuaciones, matrices rectangulares y/o modelos de área.
6. Encontrar cocientes de números enteros y restos con dividendos de hasta cuatro dígitos y divisores de un dígito, utilizando estrategias basadas en el valor posicional, las propiedades de las operaciones y/o la relación entre la multiplicación y la división. Ilustrar y explicar el cálculo mediante el uso de ecuaciones, matrices rectangulares y/o modelos de área.

[1]Las expectativas de 4.º Grado en este dominio se limitan a números inferiores o iguales a 1,000,000

Número y operaciones - Fracciones[1] 4.NF

Ampliar el conocimiento de la equivalencia de fracciones y el ordenamiento.

1. Explicar por qué una fracción a/b es equivalente a una fracción $(n \times a)/(n \times b)$ mediante el uso de modelos de fracción visuales, poniendo atención a cómo el número y tamaño de las partes difieren aunque las dos fracciones mismas sean del mismo tamaño. Usar este principio para reconocer y generar fracciones equivalentes.
2. Comparar dos fracciones con numeradores diferentes y denominadores diferentes, por ejemplo, mediante la creación de denominadores o numeradores comunes, o comparando a una fracción de referencia, como 1/2. Reconocer que las comparaciones son válidas solo cuando las dos fracciones se refieren al mismo entero. Registrar los resultados de las comparaciones con los símbolos >, =, <, y justificar las conclusiones, por ejemplo, mediante el uso de un modelo de fracción visual.

Crear fracciones a partir de fracciones de unidad aplicando y ampliando los conocimientos previos de operaciones con números enteros.

3. Comprender una fracción a/b con $a > 1$ como una suma de fracciones $1/b$.
    a. Comprender la suma y la resta de fracciones como unión y separación de partes que se refieren a un mismo entero.
    b. Descomponer una fracción a una suma de fracciones con el mismo denominador en más de una forma, registrando cada descomposición por una ecuación. Justificar las descomposiciones, por ejemplo, mediante el uso de un modelo de fracción visual. *Ejemplos 3/8 = 1/8 + 1/8 + 1/8 ; 3/8 = 1/8 + 2/8 ; 2 1/8 = 1 + 1 + 1/8 = 8/8 + 8/8 + 1/8.*
    c. Sumar y restar números mixtos con el mismo denominador, por ejemplo, mediante la sustitución de cada número mixto por una fracción equivalente, y/o mediante el uso de propiedades de operaciones y la relación entre la suma y la resta.
    d. Resolver problemas escritos de suma y resta de fracciones que se refieren a un mismo entero y que tienen el mismo denominador, por ejemplo, mediante el uso de modelos de fracción visuales y ecuaciones para representar el problema.
4. Aplicar y ampliar los conocimientos previos de multiplicación para multiplicar una fracción por un número entero.
    a. Comprender una fracción a/b como un múltiplo de $1/b$. *Por ejemplo, usar un modelo de fracción visual para representar 5/4 como el producto de 5 × (1/4), registrando la conclusión con la ecuación 5/4 = 5 × (1/4).*
    b. Comprender un múltiplo de a/b como un múltiplo de 1/b, y utilizar este conocimiento para multiplicar una fracción por un número entero. *Por ejemplo, usar un modelo de fracción visual para expresar 3 × (2/5) como 6 × (1/5), reconociendo este producto como 6/5. (En general, n × (a/b) = (n × a)/b.)*

c. Resolver problemas escritos de multiplicación de una fracción por un número entero, por ejemplo, mediante el uso de modelos de fracción visuales y ecuaciones para representar el problema. *Por ejemplo, si cada persona en una fiesta comerá 3/8 de libra de carne, y habrá 5 personas en la fiesta, ¿cuántas libras de carne serán necesarias? ¿Entre qué dos números enteros se encuentra tu respuesta?*

Comprender la notación decimal para fracciones y comparar fracciones decimales.

5. Expresar una fracción con denominador 10 como una fracción equivalente con denominador 100, y utilizar esta técnica para sumar dos fracciones con los denominadores respectivos 10 y 100.[2] *Por ejemplo, expresar 3/10 como 30/100, y sumar 3/10 + 4/100 = 34/100.*
6. Usar la notación decimal para fracciones con denominadores de 10 o 100. *Por ejemplo, reescribir 0.62 como 62/100; describir una longitud como 0.62 metros; localizar 0.62 en un diagrama de recta numérica.*
7. Comparar dos decimales hasta las centésimas razonando sobre su tamaño. Reconocer que las comparaciones son válidas solo cuando los dos decimales se refieren al mismo entero. Registrar los resultados de las comparaciones con los símbolos >, =, <, y justificar las conclusiones, por ejemplo, mediante el uso de un modelo visual.

[1]Las expectativas de 4.º Grado en este dominio se limitan a fracciones con los denominadores 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 100.
[2] Los estudiantes que pueden generar fracciones equivalentes pueden desarrollar estrategias para sumar fracciones con denominador diferentes en general. Pero la suma y la resta con denominadores diferentes, en general, no es un requisito en este grado.

Medición y datos 4.MD

Resolver problemas que incluyen la medición y conversión de mediciones de una unidad más grande a una unidad más pequeña.

1. Saber los tamaños relativos de las unidades de medición dentro de un sistema de unidades que incluyen km, m, cm; kg, g; lb, oz.; l, ml; hr, min, seg. Dentro de un único sistema de medición, expresar las mediciones en una unidad más grande en términos de una unidad más pequeña. Registrar los equivalentes de medición en una tabla de dos columnas. *Por ejemplo, saber que 1 ft es 12 veces más largo que 1 in. Expresar la longitud de una serpiente de 4 ft como 48 in. Generar una tabla de conversión para pies y pulgadas, listando el número de pares (1, 12), (2, 24), (3, 36), ...*
2. Usar las cuatro operaciones para resolver problemas que involucran distancias, intervalos de tiempo, volúmenes de líquidos, masas de objetos y dinero, incluyendo problemas con fracciones simples o decimales y problemas que requieren expresar mediciones dadas en una unidad más grande en términos de una unidad más pequeña. Representar cantidades de medición usando diagramas tales como diagramas de recta numérica que incluyen una escala de medición.
3. Aplicar las fórmulas de área y perímetro para rectángulos en problemas del mundo real y matemáticos. *Por ejemplo, encontrar el ancho de una sala rectangular dada el área del piso y la longitud, al ver la fórmula de área como una ecuación de multiplicación con un factor desconocido.*

Representar e interpretar datos.

4. Hacer una gráfica de líneas para mostrar un conjunto de datos de mediciones en fracciones de una unidad (1/2, 1/4, 1/8). Resolver problemas de suma y resta de fracciones con información presentada en gráficas de líneas. *Por ejemplo, a partir de una gráfica de líneas, encontrar e interpretar la diferencia en longitud entre los especímenes más largos y más cortos en una colección de insectos.*

Medición geométrica: comprender los conceptos de ángulos y medir ángulos.

5. Reconocer ángulos como formas geométricas que se forman donde sea que dos rayos comparten un punto final común, y comprender conceptos de medición de ángulos:
    a. Un ángulo se mide con referencia a un círculo con su centro en el punto final común de los rayos, teniendo en cuenta la fracción del arco circular entre los puntos donde los dos rayos intersectan el círculo. Un ángulo que cubre 1/360 de un círculo se llama un "ángulo de un grado", y puede usarse para medir ángulos.
    b. Un ángulo que cubre *n* ángulos de un grado se dice que tiene una medida de ángulo de *n* grados.
6. Medir ángulos en grados de números enteros usando un transportador. Dibujar ángulos de una medida especificada.
7. Reconocer la medida de ángulos como sumas. Cuando un ángulo se descompone en partes que no se superponen, la medida del ángulo del entero es la suma de las medidas de los ángulos de las partes. Resolver problemas de suma y resta para encontrar ángulos desconocidos en un diagrama en el mundo real y problemas matemáticos, por ejemplo, mediante el uso de una ecuación con un símbolo para la medida del ángulo desconocido.

Geometría 4.G

Dibujar e identificar líneas y ángulos, y clasificar formas por las propiedades de sus líneas y ángulos.

1. Dibujar puntos, líneas, segmentos de línea, rayos, ángulos (recto, agudo, obtuso), y líneas perpendiculares y paralelas. Identificar éstos en figuras bidimensionales.
2. Clasificar figuras bidimensionales basándose en la presencia o ausencia de líneas paralelas o perpendiculares, o la presencia o ausencia de ángulos de un tamaño especificado. Reconocer triángulos rectángulos como una categoría e identificar triángulos rectángulos.
3. Reconocer un eje de simetría de una figura bidimensional como una línea a través de la figura de tal forma que la figura pueda doblarse a lo largo de la línea en partes iguales. Identificar figuras de línea simétrica y dibujar líneas de simetría.

Matemáticas - 5.º Grado: Introducción

En el 5.º Grado, el tiempo de instrucción debe enfocarse en tres áreas cruciales: (1) desarrollar fluidez con la suma y resta de fracciones, desarrollar la comprensión de la multiplicación de fracciones y de división de fracciones en casos limitados (fracciones de unidad divididas por números enteros y números enteros divididos por fracciones de unidad); (2) extender la división a divisores de 2 dígitos, integrando fracciones decimales en el sistema de valor posicional y desarrollando la comprensión de las operaciones con decimales hasta las centésimas, y desarrollando la fluidez con números enteros y operaciones decimales; y (3) desarrollar el conocimiento del volumen.

1. Los estudiantes aplican sus conocimientos sobre las fracciones y los modelos de fracciones para representar la suma y resta de fracciones con distinto denominador como cálculos equivalentes con denominadores comunes. Desarrollar la fluidez en el cálculo de sumas y diferencias de fracciones, y hacer estimaciones razonables de ellas. Los estudiantes también utilizan el significado de las fracciones, de la multiplicación y la división, y la relación entre la multiplicación y la división para comprender y explicar por qué los procedimientos para multiplicar y dividir fracciones tienen sentido. (Nota: esto está limitado al caso de dividir fracciones de unidad por números enteros y números enteros por fracciones de unidad.)

2. Los estudiantes desarrollan el conocimiento de por qué los procedimientos de división trabajan basándose en el significado de números en base a diez y propiedades de las operaciones. Terminan la fluidez con la suma, resta, multiplicación y división de varios dígitos. Aplican su conocimiento de los modelos para decimales, notación decimal y propiedades de operaciones para sumar y restar decimales hasta las centésimas. Desarrollan la fluidez en estos cálculos, y hacen estimaciones razonables de sus resultados. Los estudiantes usan la relación entre decimales y fracciones, así como la relación entre decimales finitos y números enteros (es decir, un decimal finito multiplicado por una potencia adecuada de 10 es un número entero), para comprender y explicar por qué los procedimientos para multiplicar y dividir decimales finitos tienen sentido. Calculan productos y cocientes de números decimales hasta las centésimas de manera eficiente y precisa.

3. Los estudiantes reconocen el volumen como atributo del espacio tridimensional. Entienden que el volumen se puede medir al encontrar el número total de unidades del mismo tamaño de volumen necesarias para llenar el espacio sin vacíos y sin superponerse. Entienden que un cubo de 1 unidad por 1 unidad por 1 unidad es la unidad estándar para medir el volumen. Seleccionan las unidades, estrategias y herramientas apropiadas para la solución de los problemas que implican el cálculo y medición de volumen. Descomponen las formas tridimensionales y encuentran volúmenes de prismas rectangulares rectos viéndolos como descompuestos en capas de conjuntos de cubos. Miden atributos de formas necesarios con el fin de determinar los volúmenes para resolver problemas del mundo real y matemáticos.

Prácticas matemáticas

1. Dar sentido a los problemas y perseverar para solucionarlos.
2. Razonar de manera abstracta y cuantitativa.
3. Generar argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.
4. Hacer modelos matemáticos.
5. Usar las herramientas adecuadas estratégicamente.
6. Prestar atención a la precisión.
7. Buscar y hacer uso de la estructura.
8. Buscar y expresar regularidad en el razonamiento repetido.

Información general de 5.º Grado

Operaciones y pensamiento algebraico
- Escribir e interpretar expresiones numéricas.
- Analizar patrones y relaciones.

Números y operaciones en base diez
- Comprender el sistema de valor posicional.
- Realizar operaciones con números enteros de varios dígitos y con decimales hasta las centésimas.

Número y operaciones - Fracciones
- Utilizar fracciones equivalentes como estrategia para sumar y restar fracciones.
- Aplicar y ampliar los conocimientos previos de multiplicación y división para multiplicar y dividir fracciones.

Medición y datos
- Convertir unidades de medida equivalentes dentro de un sistema de medición.
- Representar e interpretar datos.
- Medición geométrica: comprender los conceptos de volumen y relacionar el volumen a la multiplicación y la suma.

Geometría
- Graficar puntos en el plano de coordenadas para resolver problemas del mundo real y matemáticos.
- Clasificar figuras bidimensionales en categorías basadas en sus propiedades.

Operaciones y pensamiento algebraico 5.OA

Escribir e interpretar expresiones numéricas.
1. Utilizar paréntesis, corchetes o llaves en expresiones numéricas, y evaluar expresiones con estos símbolos.
2. Escribir expresiones simples que registran cálculos con números, e interpretar expresiones numéricas sin evaluarlas. *Por ejemplo, expresar el cálculo "sumar 8 y 7, luego multiplicar por 2" como 2 × (8 + 7). Reconocer que 3 × (18932 + 921) es tres veces tan grande como 18932 + 921, sin necesidad de calcular la suma o productos indicados.*

Analizar patrones y relaciones.
3. Generar dos patrones numéricos utilizando dos reglas. Identificar relaciones aparentes entre términos correspondientes. Formar pares ordenados que consisten de términos correspondientes de los dos patrones, y representar gráficamente los pares ordenados en unplano de coordenadas. *Por ejemplo, dada la regla "Sumar 3" y el número inicial 0, y dada la regla "Sumar 6" y el número inicial 0, generar términos en las secuencias resultantes, y observar que los términos en una secuencia son dos veces los términos correspondientes en otra secuencia. Explicar de manera informal por qué esto es así.*

Número y operaciones en base a diez 5.NBT

Comprender el sistema de valor posicional.
1. Reconocer que en un número de varios dígitos, un dígito en un lugar representa diez veces lo que representa en el lugar a su derecha, y 1/10 lo que representa en el lugar a su izquierda.
2. Explicar los patrones en el número de ceros del producto al multiplicar un número por potencias de 10, y explicarlos patrones en la colocación del punto decimal cuando un decimal se multiplica o divide por una potencia de 10. Usar exponentes de números enteros para denotar potencias de 10.
3. Leer, escribir y comparar decimales hasta milésimas.
   a. Leer y escribir decimales hasta milésimas utilizando números de base a diez, nombres de números y forma expandida, por ejemplo, 347.392 = 3 × 100 + 4 × 10 + 7 × 1 + 3 × (1/10) + 9 × (1/100) + 2 × (1/1000).
   b. Comparar dos decimales hasta las milésimas basándose en los significados de los dígitos en cada lugar, utilizando los símbolos >, =, < para registrar los resultados de las comparaciones.
4. Usar el conocimiento del valor posicional para redondear decimales a cualquier lugar.

Realizar operaciones con números enteros de varios dígitos y con decimales hasta las centésimas.

5. Multiplicar con fluidez números enteros de varios dígitos utilizando el algoritmo estándar.
6. Encontrar cocientes de números enteros con dividendos de hasta cuatro dígitos y divisores de dos dígitos, utilizando estrategias basadas en el valor posicional, las propiedades de las operaciones y/o la relación entre la multiplicación y la división. Ilustrar y explicar el cálculo mediante el uso de ecuaciones, matrices rectangulares y/o modelos de área.
7. Sumar, restar, multiplicar y dividir decimales hasta las centésimas, usando modelos o dibujos y estrategias concretas basados en el valor posicional, propiedades de las operaciones y/o la relación entre la suma y la resta; relacionar la estrategia para un método escrito y explicar el razonamiento utilizado.

Número y operaciones - Fracciones 5.NF

Utilizar fracciones equivalentes como estrategia para sumar y restar fracciones.

1. Sumar y restar fracciones con distintos denominadores (incluyendo números mixtos) mediante la sustitución de fracciones dadas con fracciones equivalentes de tal manera para producir una suma equivalente o diferencia de fracciones con denominadores comunes. *Por ejemplo, 2/3 + 5/4 = 8/12 + 15/12 = 23/12. (En general, a/b + c/d = (ad + bc)/bd.)*
2. Resolver problemas escritos de suma y resta de fracciones que se refieren a un mismo entero, incluyendo casos de denominadores distintos, por ejemplo, mediante el uso de modelos de fracción visuales o ecuaciones para representar el problema. Usar fracciones de referencia y el sentido numérico de fracciones para calcular mentalmente y evaluar la razonabilidad de las respuestas. *Por ejemplo, reconocer un resultado incorrecto 2/5 + 1/2 = 3/7, al observar que 3/7 < 1/2.*

Aplicar y ampliar los conocimientos previos de multiplicación y división para multiplicar y dividir fracciones.

3. Interpretar una fracción como la división del numerador por el denominador ($a/b = a \div b$). Resolver problemas escritos de división de números enteros, resultando en respuestas en la forma de fracciones o números mixtos, por ejemplo, mediante el uso de modelos de fracción visuales o ecuaciones para representar el problema. *Por ejemplo, interpretar 3/4 como el resultado de dividir 3 entre 4, considerando que 3/4 multiplicado por 4 es igual a 3, y que cuando 3 enteros se comparten por igual entre 4 personas, cada una tiene un porción de tamaño 3/4. Si 9 personas quieren compartir un saco de 50 libras de arroz por igual en peso, ¿cuántas libras de arroz debe recibir cada persona? ¿Entre qué dos números enteros se encuentra tu respuesta?*
4. Aplicar y ampliar los conocimientos previos de multiplicación para multiplicar una fracción o número entero por una fracción.
    a. Interpretar el producto $(a/b) \times q$ como partes de una partición de q en b partes iguales; equivalentemente, como resultado de unasecuencia de operaciones $a \times q \div b$. *Por ejemplo, usar un modelo de fracción visual para mostrar (2/3) × 4 = 8/3, y crear un contexto de historia para esta ecuación. Hacer lo mismo con (2/3) × (4/5) = 8/15. (En general, (a/b) × (c/d) = ac/bd.)*
    b. Encontrar el área de un rectángulo con longitudes de lado de fracciones al usar mosaicos, y mostrar que el área es la misma que se encontraría multiplicando las longitudes de los lados. Multiplicar longitudes de lados fraccionales para encontrar áreas de rectángulos, y representar productos de fracciones como áreas rectangulares.
5. Interpretar la multiplicación como la ampliación (cambio de tamaño), a través de:
    a. Comparar el tamaño de un producto con el tamaño de un factor sobre la base del tamaño del otro factor, sin realizar la multiplicación indicada.
    b. Explicar por qué multiplicar un número dado por una fracción mayor de 1 resulta en un producto mayor que el número dado (reconocer la multiplicación por números enteros mayores que 1 como un caso conocido); explicandopor qué multiplicar un número dado por una fracción de menos de 1 resulta en un producto más pequeño que el número dado; y relacionando el principio de equivalencia de fracción $a/b = (n \times a)/(n \times b)$ al efecto de multiplicar a/b por 1.
6. Resolver problemas del mundo real de multiplicación de fracciones y números mixtos, por ejemplo, mediante el uso de modelos de fracción visuales o ecuaciones para representar el problema.

7. Aplicar y ampliar los conocimientos previos de división para dividir fracciones de unidad por números enteros y números enteros por fracciones de unidad.[1]
    a. Interpretar la división de una fracción de unidad por un número entero que no es cero, y calcular dichos cocientes. *Por ejemplo, crear un contexto de la historia para (1/3) ÷ 4, y crear un modelo de fracción visual para mostrar el cociente. Utilizar la relación entre la multiplicación y la división para explicar que (1/3) ÷ 4 = 1/12 porque (1/12) × 4 = 1/3.*
    b. Interpretar la división de un número entero entre una unidad de fracción, y calcular dichos cocientes. *Por ejemplo, crear un contexto de la historia para 4 ÷ (1/5), y usar un modelo de fracción visual para mostrar el cociente. Utilizar la relación entre la multiplicación y la división para explicar que 4 ÷ (1/5) = 20 porque 20 × (1/5) = 4.*
    c. Resolver problemas escritos de multiplicación de una fracción por un número entero, por ejemplo, mediante el uso de modelos de fracción visuales y ecuaciones para representar el problema. *Por ejemplo, ¿qué cantidad de chocolate recibirá cada persona si 3 personas comparten 1/2 libra de chocolate de manera equitativa? ¿Cuántas porciones de 1/3 de taza hay en 2 tazas de pasas?*

[1] Los estudiantes que pueden multiplicar fracciones en general pueden desarrollar estrategias para dividir fracciones en general, razonando acerca de la relación entre la multiplicación y la división. Pero la división de una fracción por una fracción no es un requisito en este grade.

Medición y datos 5.MD

Convertir unidades de medida equivalentes dentro de un sistema de medición.

1. Convertir unidades de medida estándar de diferentes tamaños dentro de un sistema de medición (por ejemplo, convertir 5 cm a 0.05 m), y usar estas conversiones en la solución problemas con varios pasos en el mundo real.

Representar e interpretar datos.

2. Hacer una gráfica de líneas para mostrar un conjunto de datos de mediciones en fracciones de una unidad (1/2, 1/4, 1/8). Usar operaciones en fracciones para este grado para resolver problemas que incluyen información presentada en gráficas de líneas. *Por ejemplo, dadas las diferentes mediciones de líquido en vasos idénticos, encontrar la cantidad de líquido que cada vaso contendría si la cantidad total de todos los vasos se redistribuye equitativamente.*

Medición geométrica: comprender los conceptos de volumen y relacionar el volumen a la multiplicación y la suma.

3. Reconocer el volumen como un atributo de las figuras sólidas y comprender conceptos de medición de volumen.
    a. Un cubo con longitud de lado de 1 unidad, llamada "un cubo de unidad", se dice que tiene "una unidad cúbica" de volumen, y puede usarse para medir el volumen.
    b. Una figura plana, que puede estar cubierta sin vacíos y sin superponerse por *n* unidades de cubo, se dice que tiene un área de *n* unidades cúbicas.
4. Medir volúmenes al contar cubos de unidad, usando cm cúbicos, in cúbicas, ft cúbicos y unidades improvisadas.
5. Relacionar el volumen a las operaciones de multiplicación y suma y resolver problemas del mundo real y matemáticos que incluyen volumen.
    a. Encontrar el volumen de un prisma recto rectangular con longitudes de los lados de números enteros al empacarlo con cubos de unidad, y mostrar que el volumen es el mismo que se encontraría multiplicando las longitudes de los bordes, de forma equivalente al multiplicar la altura por el área de la base. Representar productos de números enteros triples como volúmenes, por ejemplo, para representar la propiedad asociativa de la multiplicación.
    b. Aplicar las fórmulas $V = l \times w \times h$ y $V = b \times h$ para prismas rectangulares para encontrar volúmenes de prismas rectangulares rectos con longitudes de bordes de números enteros en el contexto de resolver problemas del mundo real y matemáticos.
    c. Reconocer el volumen como aditivo. Encontrar volúmenes de figuras sólidas compuestas de dos prismas rectangulares rectos al sumar los volúmenes de las partes que no se superponen, aplicando esta técnica para resolver problemas del mundo real.

Geometría 5.G

Graficar puntos en el plano de coordenadas para resolver problemas del mundo real y matemáticos.

1. Usar un par de rectas numéricas perpendiculares, llamadas ejes, para definir un sistema de coordenadas, con la intersección de las líneas (el origen) dispuesta para coincidir con el 0 en cada línea y un punto dado en el plano situado por medio del uso de un par ordenado de números, llamados sus coordenadas. Comprender que el primer número indica la distancia del viaje desde el origen en la dirección de un eje, y el segundo número indica la distancia del viaje en la dirección del segundo eje, con la convención de que los nombres de los dos ejes y las coordenadas corresponden (por ejemplo, el *eje x, coordenada x; eje y, coordenada y*).
2. Representar problemas del mundo real y matemáticos mediante la representación gráfica de puntos en el primer cuadrante del plano de coordenadas, e interpretar los valores de coordenadas de puntos en el contexto de la situación.

Clasificar figuras bidimensionales en categorías basadas en sus propiedades.

3. Comprender que los atributos que pertenecen a una categoría de figuras bidimensionales también pertenecen a todas las subcategorías de dicha categoría. Por ejemplo, todos los rectángulos tienen cuatro ángulos rectos y los cuadrados son rectángulos, así que todos los cuadrados tienen cuatro ángulos rectos.
4. Clasificar figuras bidimensionales en una jerarquía basada en las propiedades.

Matemáticas - 6.º Grado: Introducción

En el 6.º Grado, el tiempo de instrucción debe enfocarse en tres áreas cruciales: (1) conectar la proporción y tasa a la multiplicación y división de números enteros, y usar conceptos de proporción y tasa para resolver problemas; (2) completar la comprensión de la división de fracciones y ampliar la noción de número al sistema de números racionales, que incluye números negativos; (3) escribir, interpretar y usar expresiones y ecuaciones; y (4) desarrollar la comprensión del pensamiento estadístico.

1. Los estudiantes usan el razonamiento acerca de la multiplicación y la división para resolver problemas de proporción y de tasa sobre cantidades. Al ver proporciones y tasas equivalentes según se derivab de, y que extienden, pares de filas (o columnas) de la tabla de multiplicar, y mediante el análisis de dibujos sencillos que indican el tamaño relativo de las cantidades, los estudiantes conectan su conocimiento de la multiplicación y la división con proporciones y tasas. Así los estudiantes amplían el alcance de los problemas para poder usar la multiplicación y la división para resolver problemas, y conectan proporciones y fracciones. Los estudiantes resuelven una amplia variedad de problemas que involucran proporciones y tasas.

2. Los estudiantes utilizan el significado de las fracciones, de la multiplicación y la división, y la relación entre la multiplicación y la división para comprender y explicar por qué los procedimientos para y dividir fracciones tienen sentido. Los estudiantes usan estas operaciones para resolver problemas. Los estudiantes amplían sus conocimientos previos de número y el orden de los números al sistema completo de los números racionales, que incluye los números racionales negativos, y en particular, los enteros negativos. Razonan sobre el orden y el valor absoluto de los números racionales y sobre la ubicación de los puntos en los cuatro cuadrantes del plano de coordenadas.

3. Los estudiantes entienden el uso de variables en expresiones matemáticas. Escriben expresiones y ecuaciones que corresponden a situaciones dadas, evalúan expresiones, y usan expresiones y fórmulas para resolver problemas. Los estudiantes entienden que las expresiones en diferentes formas pueden ser equivalentes, y usan las propiedades de las operaciones para volver a escribir expresiones en formas equivalentes. Los estudiantes saben que las soluciones de una ecuación son los valores de las variables que hacen que la ecuación sea verdadera. Los estudiantes utilizan las propiedades de las operaciones y la idea de mantener la igualdad de ambos lados de una ecuación para resolver ecuaciones sencillas de un paso. Los estudiantes desarrollan y analizan tablas, como tablas de cantidades que se encuentran en proporciones equivalentes, y usan ecuaciones (como $3x = y$) para describir las relaciones entre cantidades.

4. Desarrollando y reforzando su conocimiento de números, los estudiantes comienzan a desarrollar su capacidad de pensar estadísticamente. Los estudiantes reconocen que una distribución de datos quizás no tenga un centro definido, y que las diferentes maneras de medir el centro resulta en valores diferentes. La media mide el centro en el sentido de que es aproximadamente el valor medio. El promedio mide el centro en el sentido de que es el valor que cada punto de datos tomaría si el total de los valores de datos se redistribuyera equitativamente, y también en el sentido de que es un punto de equilibrio. Los estudiantes reconocen que una medida de variabilidad (rango intercuartil o desviación media absoluta) también puede ser útil para resumir los datos porque dos conjuntos muy diferentes de datos pueden tener el mismo promedio y la misma media, y aún así distinguirse por su variabilidad. Los estudiantes aprenden a describir y resumir conjuntos de datos numéricos, agrupaciones identificadoras, picos, vacíos, y simetría, teniendo en cuenta el contexto en el que se recogieron los datos.

Los estudiantes de 6.º Grado también desarrollan su trabajo con el área en la escuela primaria al razonar acerca de las relaciones entre las formas para determinar el área, área de superficie y volumen. Encuentran áreas de los triángulos rectángulos, otros triángulos y cuadriláteros especiales al descomponer estas formas, reorganizar o quitar piezas, y relacionar las formas de rectángulos. Usando estos métodos, los estudiantes discuten, desarrollan y justifican las fórmulas para las áreas de triángulos y paralelogramos. Los estudiantes encuentran áreas de polígonos y áreas de superficies de prismas y pirámides al descomponerlos en piezas cuya área se puede determinar. Razonan acerca de prismas rectangulares rectos con longitudes de lados fraccionales para extender fórmulas para el volumen de un prisma rectangular recto a longitudes de lados fraccionales. Se preparan para trabajar en dibujos a escala y construcciones en el 7.º Grado, dibujando polígonos en el plano de coordenadas.

Prácticas matemáticas

1. Dar sentido a los problemas y perseverar para solucionarlos.
2. Razonar de manera abstracta y cuantitativa.
3. Generar argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.
4. Hacer modelos matemáticos.
5. Usar las herramientas adecuadas estratégicamente.
6. Prestar atención a la precisión.
7. Buscar y hacer uso de la estructura.
8. Buscar y expresar regularidad en el razonamiento repetido.

Información general de 6.º Grado

Proporciones y relaciones proporcionales
- Comprender los conceptos de proporción y usar el razonamiento de proporción para resolver problemas.

El sistema numérico
- Aplicar y ampliar los conocimientos previos de multiplicación y división para dividir fracciones entre fracciones.
- Calcular con facilidad con números de varios dígitos y encontrar factores y múltiplos comunes.
- Aplicar y ampliar conocimientos previos de números al sistema de los números racionales.

Expresiones y ecuaciones
- Aplicar y ampliar conocimientos previos de aritmética a las expresiones algebraicas.
- Razonar acerca de y resolver ecuaciones de una variable y desigualdades.
- Representar y analizar relaciones cuantitativas entre variables dependientes e independientes.

Geometría
- Resolver problemas del mundo real y matemáticos que implican área, área de superficie y volumen.

Estadística y probabilidad
- Desarrollar conocimientos de variabilidad estadística.
- Resumir y describir distribuciones.

Proporciones y relaciones proporcionales 6.RP

Comprender los conceptos de proporción y usar el razonamiento de proporción para resolver problemas.

1. Comprender el concepto de una proporción y usar lenguaje de proporciones para describir una relación de proporción entre dos cantidades. *Por ejemplo, "La proporción de alas a picos en el aviario del zoológico es 2:1, ya que por cada 2 alas había 1 pico". "Por cada voto que el candidato A recibió, el candidato C recibió casi tres votos".*
2. Comprender el concepto de una tasa de unidad a/b asociada con una proporción a:b con $b \neq 0$, y usar el lenguaje de proporción en el contexto de una relación de proporción. *Por ejemplo, "Esta receta tiene una proporción de 3 tazas de harina por 4 tazas de azúcar, por lo que hay 3/4 taza de harina por cada taza de azúcar". "Pagamos $75 por 15 hamburguesas, que es una tasa de $5 por hamburguesa."* [1]
3. Usar el razonamiento de proporción y de tasa para resolver problemas del mundo real y matemáticos, por ejemplo, mediante un razonamiento acerca de tablas de proporciones equivalentes, diagramas de cinta, diagramas de línea numérica doble o ecuaciones.
   a. Hacer tablas de proporciones equivalentes relacionando cantidades con mediciones de números enteros, encontrar valores faltantes en las tablas, y representar los pares de valores en el plano de coordenadas. Usar tablas para comparar proporciones.
   b. Resolver problemas de tasa de unidad, incluyendo aquellos relativos a precios por unidad y velocidad constante. *Por ejemplo, si tomó 7 horas podar el césped de 4 jardines, entonces a esa tasa, ¿cuántos jardines podrían podarse en 35 horas? ¿A qué tasa se estaban podando los jardines?*
   c. Encontrar un porcentaje de una cantidad como una tasa por 100 (por ejemplo, el 30% de una cantidad significa 30/100 veces la cantidad); resolver problemas que incluyen encontrar el entero cuando se tiene una parte y el porcentaje.
   d. Usar el razonamiento de proporción para convertir unidades de medida; manipular y transformar unidades apropiadamente cuando se multiplican o dividen cantidades.

[1] Las expectativas para tasas de unidad en este grado se limitan a fracciones no complejas.

El sistema numérico 6.NS

Aplicar y ampliar los conocimientos previos de multiplicación y división para dividir fracciones entre fracciones.

1. Interpretar y calcular cocientes de fracciones, y resolver problemas escritos que incluyen división de fracciones entre fracciones, por ejemplo, mediante el uso de modelos de fracción visuales y ecuaciones para representar el problema. *Por ejemplo, crear un contexto de la historia para (2/3) ÷ (3/4) y usar un modelo de fracción visual para mostrar el cociente; usar la relación entre la multiplicación y división para explicar que (2/3) ÷ (3/4) = 8/9 porque 3/4 de 8/9 es 2/3. (En general, (a/b) ÷ (c/d) = ad/bc.) ¿Qué cantidad de chocolate recibirá cada persona si 3 personas comparten 1/2 libra de chocolate de manera equitativa? ¿Cuántas porciones de 3/4 de taza hay en 2/3 de taza de yogurt? ¿Cuán ancha es una tira rectangular de tierra con una longitud de 3/4 de milla y área de 1/2 milla cuadrada?*

Calcular con facilidad con números de varios dígitos y encontrar factores y múltiplos comunes.

2. Dividir con fluidez números de varios dígitos usando el algoritmo estándar.
3. Sumar, restar, multiplicar y dividir con fluidez decimales de varios dígitos usando el algoritmo estándar para cada operación.
4. Encontrar el factor común más grande de dos números enteros menores o iguales a 100 y el mínimo múltiplo común de dos números enteros menores o iguales a 12. Usar la propiedad distributiva para expresar una suma de dos números enteros 1-100 con un factor común como un múltiplo de una suma de dos números enteros sin un factor común. *Por ejemplo, expresar 36 + 8 como 4 (9 + 2).*

Aplicar y ampliar conocimientos previos de números al sistema de los números racionales.

5. Comprender que los números positivos y negativos se utilizan conjuntamente para describir cantidades que tienen direcciones o valores opuestos (por ejemplo, temperatura por encima/por debajo de cero, elevación por encima/por debajo del nivel del mar, créditos/débitos, carga eléctrica positiva/negativa); usar números positivos y negativos para representar cantidades en contextos del mundo real, lo que explica el significado de 0 en cada situación.
6. Comprender un número racional como un punto en la recta numérica. Extender diagramas de recta numérica y ejes de coordenadas conocidos de los grados anteriores para representar los puntos en la línea y en el plano con coordenadas de números negativos.
    a. Reconocer que los signos opuestos de números indican lugares en lados opuestos de 0 en la recta numérica; reconocer que el opuesto del número es el número en sí, por ejemplo, -(- 3) = 3, y que 0 es su propio opuesto.
    b. Comprender que los signos de los números en pares ordenados indican los lugares en los cuadrantes del plano de coordenadas; reconocer que cuando dos pares ordenados se diferencian solo por los signos, las ubicaciones de los puntos están relacionados por las reflexiones a través de uno o ambos ejes.
    c. Encontrar y colocar enteros y otros números racionales en un diagrama de recta numérica horizontal o vertical; y encontrar y colocar pares de números enteros y otros números racionales en un plano de coordenadas.
7. Comprender el ordenamiento y el valor absoluto de números racionales.
    a. Interpretar afirmaciones de desigualdad como afirmaciones sobre la posición relativa de dos números en un diagrama de recta numérica. *Por ejemplo, interpretar -3 > -7 como una afirmación de que -3 se encuentra a la derecha de -7 en una recta numérica orientada de izquierda a derecha.*
    b. Escribir, interpretar y explicar las afirmaciones de orden de los números racionales en contextos del mundo real. *Por ejemplo, escribir -3 °C > -7 °C para expresar el hecho que -3 °C es más cálido que - 7 °C.*
    c. Comprender el valor absoluto de un número racional como su distancia a 0 en la recta numérica; interpretar el valor absoluto como magnitud de una cantidad positiva o negativa en una situación del mundo real. *Por ejemplo, para un saldo de cuenta de -30 dólares, escribir |-30| = 30 para describir el tamaño de la deuda en dólares.*
    d. Distinguir las comparaciones de valor absoluto de las afirmaciones sobre el orden. *Por ejemplo, reconocer que un saldo de cuenta de menos de -30 dólares representa una deuda superior a los 30 dólares.*
8. Resolver problemas del mundo real y matemáticos mediante la representación gráfica de puntos en los cuatro cuadrantes del plano de coordenadas. Incluir el uso de coordenadas y valor absoluto para encontrar las distancias entre los puntos con la misma primera coordenada o la misma segunda coordenada.

Expresiones y ecuaciones 6.EE

Aplicar y ampliar conocimientos previos de aritmética a las expresiones algebraicas.

1. Escribir y evaluar expresiones numéricas que incluyen exponentes de números enteros.
2. Escribir, leer y evaluar expresiones en la que las letras representan números.
    a. Escribir expresiones que registran operaciones con números y con letras que representan números. *Por ejemplo, expresar el cálculo "Restar y de 5" como 5 - y.*
    b. Identificar las partes de una expresión usando términos matemáticos (suma, término, producto, factor, cociente, coeficiente); ver una o más partes de una expresión como una sola entidad. *Por ejemplo, describir la expresión 2 (8 + 7) como un producto de dos factores; ver (8 + 7) como una sola entidad y como una suma de dos términos.*
    c. Evaluar expresiones en valores específicos de sus variables. Incluir expresiones que surgen de las fórmulas utilizadas en problemas del mundo real. Realizar operaciones aritméticas, incluyendo aquellas que involucran exponentes de números enteros, en el orden convencional cuando no hay paréntesis para especificar un orden determinado (Orden de operaciones). *Por ejemplo usar las fórmulas* $V = s^3$ *y* $A = 6\,s^2$ *para encontrar el volumen y área de superficie de un cubo con lados de longitud* $s = 1/2$.
3. Aplicar las propiedades de operaciones para generar expresiones equivalentes. *Por ejemplo, aplicar la propiedad distributiva para la expresión 3 (2 + x) para producir la expresión equivalente 6 + 3x; aplicar la propiedad distributiva para la expresión 24x + 18y para producir la expresión equivalente 6 (4x + 3y); aplicar las propiedades de operaciones para y + y + y para producir la expresión equivalente 3y.*
4. Identificar cuando dos expresiones son equivalentes (es decir, cuando las dos expresiones nombran el mismo número independientemente de qué valor se sustituye en ellas). *Por ejemplo, la expresión y + y + y es equivalente a 3y porque nombran el mismo número, independientemente del número que la letra "y" represente.*

Razonar acerca de y resolver ecuaciones de una variable y desigualdades.

5. Comprender la solución de una ecuación o desigualdad como un proceso de responder a una pregunta: ¿qué valores de un conjunto específico, si lo hay, hacen que la ecuación o desigualdad sea verdadera? Usar la sustitución para determinar si un número en un conjunto específico hace que una ecuación o desigualdad sea verdadera.
6. Usar variables para representar números y escribir expresiones al resolver problemas del mundo real o matemáticos; comprender que una variable puede representar un número desconocido; o, dependiendo del objetivo, cualquier número en un conjunto específico.
7. Resolver problemas del mundo real y matemáticos escribiendo y resolviendo ecuaciones de la forma $x + p = q$ y $px = q$ para los casos en que p, q, x sean todos números racionales no negativos.
8. Escribir una desigualdad de la forma $x > c$ ó $x < c$ para representar una restricción o condición en un problema del mundo real o matemático. Reconocer que las desigualdades de la forma $x > c$ ó $x < c$ tienen una infinidad de soluciones; representar soluciones de dichas desigualdades sobre diagramas de recta numérica.

Representar y analizar relaciones cuantitativas entre variables dependientes e independientes.

9. Utilizar variables para representar dos cantidades en un problema del mundo real que cambia en la relación entre sí; escribir una ecuación para expresar una cantidad, considerada como la variable dependiente, en términos de la otra cantidad, considerada como la variable independiente. Analizar la relación entre las variables dependientes e independientes utilizando gráficas y tablas, y relacionarlas con la ecuación. Por ejemplo, en un problema que involucra el movimiento a velocidad constante, listar y graficar los pares ordenados de distancias y tiempos, y escribir la ecuación d = 65t para representar la relación entre la distancia y el tiempo.

Geometría 6.G

Resolver problemas del mundo real y matemáticos que implican área, área de superficie y volumen.

1. Encontrar el área de los triángulos rectángulos, otros triángulos, cuadriláteros especiales y polígonos al componer rectángulos o descomponer en triángulos y otras formas; aplicar estas técnicas en el contexto de la solución de problemas del mundo real y matemáticos.
2. Encontrar el volumen de un prisma recto rectangular con longitudes de borde fraccional al empacarlo con cubos con longitudes de borde fracción de unidad apropiadas, y mostrar que el volumen es el mismo que se encontraría multiplicando las longitudes de los bordes del prisma. Aplicar las fórmulas $V = l \times w \times h$ y $V = b \times h$ para prismas rectangulares para encontrar volúmenes de prismas rectangulares rectos con longitudes de bordes fraccionales en el contexto de resolver problemas del mundo real y matemáticos.
3. Dibujar polígonos en el plano de coordenadas dadas las coordenadas para los vértices; usar coordenadas para encontrar la longitud de un lado que une los puntos con la misma primera coordenada o la misma segunda coordenada. Aplicar estas técnicas en el contexto de la solución de problemas del mundo real y matemáticos.
4. Representar figuras tridimensionales usando redes formadas por rectángulos y triángulos, y usar las redes para encontrar el área de superficie de estas figuras. Aplicar estas técnicas en el contexto de la solución de problemas del mundo real y matemáticos.

Estadística y probabilidad 6.SP

Desarrollar conocimientos de variabilidad estadística.

1. Reconocer una pregunta estadística como una que anticipa la variabilidad en los datos relacionados a la pregunta y da cuenta de la variabilidad en las respuestas. *Por ejemplo, "¿Cuántos años tengo?" no es una pregunta estadística; pero "¿Cuántos años tienen los estudiantes en mi escuela?" sí es una pregunta estadística porque uno anticipa variabilidad en las edades de los estudiantes.*
2. Comprender que un conjunto de datos recopilados para responder a una pregunta estadística tiene una distribución que puede ser descrita por su centro, propagación y la forma general.
3. Reconocer que una medida del centro de un conjunto de datos numéricos resume todos sus valores con un solo número, mientras que una medida de la variación describe cómo sus valores varían con un solo número.

Resumir y describir distribuciones.

4. Mostrar datos numéricos en gráficas en una recta numérica, incluyendo gráficas de puntos, histogramas y diagramas de caja.
5. Resumir los conjuntos de datos numéricos en relación con su contexto, como:
    a. Informar sobre el número de observaciones.
    b. Describir la naturaleza del atributo bajo investigación, incluyendo la forma en que se midió y sus unidades de medición.
    c. Dar medidas cuantitativas de centro (media y/o promedio) y la variabilidad (rango intercuartil y/o desviación media absoluta), así como describir un patrón general y cualquier desviación notable del patrón general con referencia al contexto en el que se recogieron los datos.
    d. Relacionar la elección de medidas de centro y la variabilidad de la forma de la distribución de datos y el contexto en el que se recogieron los datos.

Matemáticas - 7.º Grado: Introducción

En el 7.º Grado, el tiempo de instrucción debe enfocarse en cuatro áreas cruciales: (1) desarrollar el conocimiento y aplicación de las relaciones proporcionales; (2) desarrollar el conocimiento de las operaciones con números racionales y trabajar con expresiones y ecuaciones lineales; (3) resolver problemas relacionados con dibujos a escala y construcciones geométricas informales, y trabajar con formas bi y tridimensionales para resolver problemas que involucran área, área de superficie y volumen; y (4) hacer inferencias acerca de la población basándose en muestras.

1. Los estudiantes amplían su conocimiento de las proporciones y desarrollan el conocimiento de proporcionalidad para resolver problemas de uno y de múltiples pasos. Los estudiantes usan su conocimiento de proporciones y de la proporcionalidad para resolver una amplia variedad de problemas de porcentaje, incluyendo aquellos que involucran descuentos, intereses, impuestos, propinas, y aumento o disminución de porcentajes. Los estudiantes resuelven problemas sobre dibujos a escala relacionando longitudes correspondientes entre los objetos o usando el hecho que las relaciones de longitudes dentro de un objeto se conservan en objetos similares. Los estudiantes crean gráficas de relaciones proporcionales y comprenden la tasa de unidad de manera informal como una medida de la inclinación de la línea relacionada, llamada pendiente. Distinguen relaciones proporcionales de otras relaciones.

2. Los estudiantes desarrollan una comprensión unificada de número, reconociendo fracciones, decimales (que tienen una representación decimal finita o repetida), y porcentajes como diferentes representaciones de números racionales. Los estudiantes amplían la suma, resta, multiplicación y división a todos los números racionales, manteniendo las propiedades de las operaciones y las relaciones entre la suma y la resta, y la multiplicación y la división. Mediante la aplicación de estas propiedades, y viendo los números negativos en términos de contextos cotidianos (por ejemplo, cantidades adeudadas o temperaturas bajo cero), los estudiantes explican e interpretan las reglas para sumar, restar, multiplicar y dividir con números negativos. Usan la aritmética de los números racionales al formular expresiones y ecuaciones en una variable y usan estas ecuaciones para resolver problemas.

3. Los estudiantes continúan su trabajo con el área del 6.º Grado, resolviendo problemas relacionados con el área y la circunferencia de círculo y área de superficie de objetos tridimensionales. En preparación para trabajar en la congruencia y similitud en el 8.º Grado, razonan acerca de las relaciones entre figuras bidimensionales usando dibujos a escala y construcciones geométricas informales, y adquieren familiaridad con las relaciones entre ángulos formados por líneas que se intersectan. Los estudiantes trabajan con figuras tridimensionales, relacionándolas con figuras bidimensionales al examinar las secciones transversales. Resuelven problemas del mundo real y matemáticos que implican área, área de superficie, y volumen de objetos bi y tridimensionales compuestos de triángulos, cuadriláteros, polígonos, cubos y prismas rectos.

4. Los estudiantes desarrollan su trabajo previo con distribuciones de datos individuales para comparar dos distribuciones de datos y responder preguntas sobre las diferencias entre las poblaciones. Comienzan el trabajo informal con muestreo aleatorio para generar los conjuntos de datos y aprenden sobre la importancia de muestras representativas para hacer inferencias.

Prácticas matemáticas

1. Dar sentido a los problemas y perseverar para solucionarlos.
2. Razonar de manera abstracta y cuantitativa.
3. Generar argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.
4. Hacer modelos matemáticos.
5. Usar las herramientas adecuadas estratégicamente.
6. Prestar atención a la precisión.
7. Buscar y hacer uso de la estructura.
8. Buscar y expresar regularidad en el razonamiento repetido.

Información general de 7.º Grado

Proporciones y relaciones proporcionales

- Analizar relaciones proporcionales y usarlas para resolver problemas del mundo real y matemáticos.

El sistema numérico

- Aplicar y ampliar los conocimientos previos de las operaciones con fracciones para sumar, restar, multiplicar y dividir números racionales.

Expresiones y ecuaciones

- Usar las propiedades de operaciones para generar expresiones equivalentes.
- Resolver problemas de la vida real y matemáticos usando expresiones y ecuaciones numéricas y algebraicas.

Geometría

- Dibujar, construir y describir figuras geométricas y describir las relaciones entre ellas.
- Resolver problemas cotidianos y matemáticos que implican medición de ángulos, área, área de superficie y volumen.

Estadística y probabilidad

- Usar muestreo aleatorio para hacer inferencias acerca de una población.
- Hacer inferencias comparativas informales acerca de dos poblaciones.
- Investigar los procesos de posibilidad para desarrollar, usar y evaluar modelos de probabilidad.

Proporciones y relaciones proporcionales 7.RP

Analizar relaciones proporcionales y usarlas para resolver problemas del mundo real y matemáticos.

1. Calcular tasas de unidad asociadas con proporciones de fracciones, incluyendo proporciones de longitudes, áreas y otras cantidades medidas en unidades similares o diferentes. *Por ejemplo, si una persona camina 1/2 milla en cada 1/4 de hora, calcula la tasa de unidad como la fracción compleja* $^{1/2}/_{1/4}$ *millas por hora, equivalentemente 2 millas por hora.*
2. Reconocer y representar relaciones proporcionales entre cantidades.
    a. Decidir si dos cantidades están en una relación proporcional, por ejemplo, mediante pruebas de proporciones equivalentes en una tabla o representación gráfica en un plano de coordenadas, y observando si la gráfica es una línea recta a través del origen.
    b. Identificar la constante de proporcionalidad (tasa de unidad) en tablas, gráficas, ecuaciones, diagramas y descripciones verbales de relaciones proporcionales.
    c. Representar relaciones proporcionales por medio de ecuaciones. *Por ejemplo, si el costo total de t es proporcional al número n de artículos comprados a un precio constante p, la relación entre el costo total y el número de artículos puede expresarse como t = pn.*
    d. Explicar qué significa un punto (x, y) en la gráfica de una relación proporcional en términos de la situación, con atención especial a los puntos (0, 0) y (1, r), donde r es la tasa de unidad.
3. Usar relaciones proporcionales para resolver problemas de proporción y porcentaje de varios pasos. Ejemplos: interés simple, impuestos, aumentos y rebajas, propinas y comisiones, honorarios, aumento y disminución de porcentajes, error de porcentaje.

Sistema numérico 7.NS

Aplicar y ampliar los conocimientos previos de las operaciones con fracciones para sumar, restar, multiplicar y dividir números racionales.

1. Aplicar y ampliar los conocimientos previos de la suma y la resta para sumar y restar números racionales; representar la suma y resta en un diagrama de recta numérica horizontal o vertical.
    a. Describir situaciones en las que cantidades opuestas se combinan para resultar en 0. *Por ejemplo, un átomo de hidrógeno tiene carga 0 porque sus dos constituyentes tienen cargadas opuestas.*

b. Comprender $p + q$ como el número situado a una distancia $|q|$ de p, en la dirección positiva o negativa dependiendo de si q es positivo o negativo. Demostrar que un número y su opuesto tienen una suma de 0 (son inversos aditivos). Interpretar sumas de números racionales al describir contextos del mundo real.
c. Comprender la resta de números racionales como la suma del inverso aditivo, $p - q = p + (q)$. Mostrar que la distancia entre dos números racionales en la recta numérica es el valor absoluto de su diferencia, y aplicar este principio en contextos del mundo real.
d. Aplicar las propiedades de las operaciones como estrategias para sumar y restar números racionales.

2. Aplicar y ampliar los conocimientos previos de multiplicación y división, y de fracciones, para multiplicar y dividir números racionales.
   a. Comprender que la multiplicación se extiende de fracciones a números racionales al requerir que las operaciones continúen satisfaciendo las propiedades de las operaciones, en particular, la propiedad distributiva, lo que lleva a productos como (-1) (-1) = 1 y las reglas para multiplicar números asignados. Interpretar productos de números racionales al describir contextos del mundo real.
   b. Entender que se pueden dividir números enteros, siempre y cuando el divisor no sea cero, y cada cociente de números enteros (con divisor que no sea cero) es un número racional. Si p y q son números enteros, entonces $-(p/q) = (-p)/q = p/(-q)$. Interpretar cocientes de números racionales al describir contextos del mundo real.
   c. Aplicar propiedades de las operaciones como estrategias para multiplicar y dividir números racionales.
   d. Convertir un número racional a un decimal usando la división larga; saber que la forma decimal de un número racional termina en 0 o se repite eventualmente.
3. Resolver problemas del mundo real y matemáticos que implican las cuatro operaciones con números racionales.[1]

[1] Los cálculos con números racionales amplían las reglas para la manipulación de fracciones a fracciones complejas.

Expresiones y ecuaciones 7.EE

Usar las propiedades de operaciones para generar expresiones equivalentes.

1. Aplicar las propiedades de operaciones como estrategias para sumar, restar, factorizar y ampliar expresiones lineales con coeficientes racionales.
2. Comprender que volver a escribir una expresión en diferentes formas en un contexto de problema puede aclarar el problema y cómo las cantidades en él están relacionadas. *Por ejemplo, a + 0.05a = 1.05a significa que "aumentar en un 5%" es lo mismo que "multiplicar por 1.05".*

Resolver problemas de la vida real y matemáticos usando expresiones y ecuaciones numéricas y algebraicas.

3. Resolver problemas del mundo real y matemáticos, de varios pasos, planteados con números racionales positivos y negativos en cualquier forma (números enteros, fracciones y decimales), usando herramientas de manera estratégica. Aplicar las propiedades de operaciones para calcular con números en cualquier forma; convertir entre formas, según sea adecuado; y evaluar la razonabilidad de las respuestas usando estrategias de cálculo y estimación mentales. *Por ejemplo: Si una mujer con un pago de $25 cada hora obtiene un aumento del 10%, logrará obtener 1/10 adicional a su salario cada hora, o $2.50, para dar como resultado un salario de $27.50 Si deseas colocar una barra para colgar la toalla de 9 3/4 pulgadas de longitud en el centro de una puerta de 27 1/2 pulgadas de ancho, necesitarás colocar la barra alrededor de 9 pulgadas de cada uno de los bordes; está estimación puede utilizarse como una comprobación al momento del calculo exacto.*
4. Usa variables para representar cantidades en el mundo real o un problema matemático y construye ecuaciones simples y desigualdades para resolver problemas, mediante el razonamiento de las cantidades.
   a. Resuelve problemas con palabras que llevan a ecuaciones de la forma $px + q = r$ *y* $p(x + q) = r$, donde p, q, y r, son números racionales específicos. Resuelve este tipo de ecuaciones de forma fluida. Compara una solución algebraica contra una solución aritmética, identificando la secuencia de las operaciones utilizadas en cada enfoque. Por ejemplo, el *perímetro de un rectángulo es 54 cm. Su longitud es de 6 cm. ¿Cuál es su ancho?*
   b. Resuelve problemas con palabras que llevan a desigualdades de la forma $px + q > r$ ó $px + q < r$, donde p, q, y r, son números racionales específicos. Representa con una gráfica la solución de la desigualdad e interprete en el contexto del problema. *Por ejemplo: Como vendedor te pagan $50 por semana más $3 por venta. Esta semana deseas que tu pago sea de al menos $100. Escribe una desigualdad para el número de ventas que necesitas realizar y describe las soluciones.*

Geometría 7.G

Dibujar figuras geométricas construyéndolas con el compás y la regla, y después describir la relación entre ellas.

1. Resolver problemas que involucran dibujar con regla figuras geométricas y que incluyen calcular las longitudes y áreas reales de un dibujo a escala y además, reproducir un dibujo a escala en una escala diferente.
2. Dibujar (a mano libre con regla y transportador y otras herramientas) formas geométricas con las condiciones expuestas. Concentrarse en dibujar con compás y regla triángulos a partir de tres medidas de ángulos o lados, teniendo en cuenta cuando las condiciones determinan un solo triángulo, más de un triángulo o ningún triangulo.
3. Describir figuras bidimensionales que resultan de hacer un corte en figuras tridimensionales, como en las secciones planas de los prismas rectangulares rectos y las pirámides rectangulares rectas.

Resolver problemas cotidianos y matemáticos que implican medición de ángulos, área, área de superficie y volumen.

4. Saber las formulas del área y la circunferencia de un circulo y utilizarlas para resolver problemas; aportando una deducción informal de la relación entre la circunferencia y el área de un circulo.
5. Utilizar los hechos acerca de los ángulos suplementarios, complementarios, verticales y adyacentes en problemas con solución en pasos múltiples, para escribir y resolver ecuaciones simples con respecto a un ángulo en una figura.
6. Resolver problemas matemáticos y de la vida real que involucran área, volumen y área de superficie de objetos de 2 y 3 dimensiones que se componen de triángulos, cuadriláteros, polígonos, cubos y prismas rectos.

Estadística y probabilidad 7.SP

Usar muestreo aleatorio para hacer inferencias acerca de una población.

1. Entender que la estadística puede ser utilizada para obtener información acerca de una población examinando una muestra de la población; las generalizaciones acerca de una población con respecto a la muestra son validas solo si la muestra es representativa de esa población. Entender que una muestra aleatoria tiende a producir muestras representativas y que apoya inferencias válidas.
2. Utilizar datos de una muestra aleatoria para representar inferencias de una población con una característica de interés que es desconocida. Generar muestras múltiples (o muestras simuladas) del mismo tamaño para evaluar la variación en estimaciones o predicciones. *Por ejemplo, estimar la longitud media de las palabras en un libro mediante la toma de muestras aleatorias de las palabras del libro; predecir el ganador en una elección escolar aplicando como base datos de encuestas aleatorias. Evaluar qué tan lejana se encuentra la estimación o predicción.*

Hacer inferencias comparativas informales acerca de dos poblaciones.

3. Estimar de forma informal el grado de superposición visual de dos distribuciones de datos numéricos con variabilidades similares, midiendo la diferencia entre los centros expresándola como un múltiplo de una medida de variabilidad. *Por ejemplo, la altura media de los jugadores del equipo de baloncesto es 10 cm más grande que la altura media de los jugadores del equipo de fútbol soccer, alrededor de dos veces la variabilidad (desviación media absoluta) en cada equipo; en una gráfica de puntos, la separación entre los dos distribuciones de alturas es notoria.*
4. Usar las medidas de centro y medidas de variabilidad para datos numéricos para muestras aleatorias para representar inferencias comparativas informales acerca de dos poblaciones. *Por ejemplo, decidir si las palabras en un capítulo de un libro de ciencias del 7.º grado son generalmente más largas que las palabras en un capítulo de un libro de ciencias de 4.º grado.*

Investigar los procesos de posibilidad para desarrollar, usar y evaluar modelos de probabilidad.

5. Entender que la probabilidad de un evento de cambio es un número entre 0 y 1 que expresa la posibilidad de que un evento ocurra Números grandes indican grandes probabilidades. La probabilidad cerca de 0 indica un evento poco probable, la probabilidad alrededor de 1/2 indica un evento que no es ni probable ni tampoco improbable y una probabilidad cercana a 1 indica un evento posible.
6. Aproximar la probabilidad de un evento de cambio mediante la recopilación de datos en el proceso de posibilidad que lo produce y observando su frecuencia relativa a largo plazo, y predecir la frecuencia relativa aproximada en base a la probabilidad. *Por ejemplo, cuando se hace rodar un cubo 600 veces, predecir que un 3 o un 6 aparecerán a groso modo unas 200 veces, pero probablemente, no exactamente 200 veces.*
7. Desarrollar un modelo de probabilidad y utilizarlo para encontrar eventos de probabilidades. Comparar las probabilidades de un modelo contra las frecuencias observadas; si la concordancia no es correcta, explicar las posibles fuentes de la discrepancia.

a. Desarrollar un modelo de probabilidad uniforme asignando la misma probabilidad a todos los resultados y utilizar el modelo para determinar las probabilidades de los eventos. *Por ejemplo, si un estudiante es seleccionado de forma aleatoria de entre una clase, encontrar la probabilidad de que Jane Will sea seleccionada y la probabilidad de seleccionar una niña.*
b. Desarrollar un modelo de probabilidad (el cual no sea uniforme) observando las frecuencias de los datos generados en un proceso de posibilidades. *Por ejemplo, encontrar la probabilidad aproximada de que una moneda lanzada al aire caiga con la cara hacia arriba o que un vaso de papel caiga con el lado abierto hacia arriba. ¿los resultados de la moneda al aire parecen ser igualmente probables en base a las frecuencias observadas?*

8. Encontrar probabilidades de eventos compuestos utilizando listas organizadas, tablas, diagramas de árbol y simulaciones.
    a. Entender que al igual que con los eventos simples, la probabilidad de un evento compuesto es la fracción de resultados en el espacio de la muestra para la cual el evento compuesto ocurre.
    b. Representar los espacios de muestra para los eventos compuestos utilizando métodos tales como, listas, tablas y diagramas de árbol. Identificar los resultados para un evento descrito con lenguaje de uso cotidiano (p.ej. "sacar par de seis"), en el espacio de la muestra que compone el evento.
    c. Diseñar y usar una simulación para generar frecuencias para eventos compuestos. *Por ejemplo, utilizar dígitos aleatorios como una herramienta de simulación para aproximar la respuesta a la pregunta: Si el 40% de donadores tienen sangre tipo A, ¿cuál es la probabilidad que tomará encontrar a un donador con sangre tipo A de entre 4 donadores?*

Matemáticas - 8.º Grado: Introducción

En el Grado 8.º el tiempo de la instrucción deberá enfocarse en áreas importantes (1) Formular y razonar expresiones y ecuaciones, incluyendo modelar una asociación de datos con doble variable con una ecuación lineal, y resolver ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales; (2) comprender el concepto de función y utilizando funciones describir relaciones cuantitativas; (3) analizar espacios y figuras de 2 y 3 dimensiones utilizando distancia, ángulo, similaridad y congruencia, y entendiendo y aplicando el teorema de Pitágoras.

1. Los estudiantes utilizarán ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales para representar, analizar y resolver varios tipos de problemas. Los estudiantes reconocerán ecuaciones para proporciones ($y/x = m$ *ó* $y = mx$) como ecuaciones lineales especiales ($y = mx + b$), entendiendo que la constante de proporcionalidad (m) es la pendiente, y las gráficas son líneas a través del origen. Deberán entender que la pendiente (m) de una recta es la razón de cambio constante, de forma que si la entrada o coordenada x — también una cantidad A, la salida o coordenada y — también una cantidad de $m \cdot A$. Igualmente, los estudiantes también utilizarán ecuaciones lineales para describir la asociación entre dos cantidades de datos con doble variable (como por ejemplo en la extensión del brazo vs. la altura de los estudiantes en el salón de clases). En este grado, adecuar el modelo y valorar su aplicación a los datos se hace informalmente. Interpretar el modelo en el contexto de los datos requiere que los estudiantes expresen una relación entre las dos cantidades en cuestión y que interpreten los componentes de la relación (como por ejemplo la pendiente y intersección de la coordenada - y) en términos de la situación.

1. Los estudiantes elegirán estratégicamente e implementarán eficientemente procedimientos para resolver ecuaciones lineales de una variable, entendiendo que cuando utilizan las propiedades de la igualdad y el concepto de equivalencia lógica, mantienen las soluciones de la ecuación original. De igual forma los estudiantes resolverán sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables y relacionarán los sistemas con pares de líneas en el plano; éstas se interceptan, son paralelas o son parte de la misma línea. Los estudiantes usarán ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones lineales, funciones lineales y entenderán la pendiente de la recta para aplicarla analizando situaciones y resolver problemas.

2. Comprenderán el concepto de una función como regla para asignar a cada entrada exactamente una salida. También entenderán que las funciones describen situaciones donde una cantidad determina otra. Podrán convertir entre representaciones y representaciones parciales de funciones (tomando nota de que las representaciones tabulares y las representaciones gráficas pueden ser representaciones parciales) y que ellas describen cómo es que los aspectos de una función se reflejan en distintas representaciones.

3. Los estudiantes utilizarán las ideas de distancia y ángulos, como se comportan en las traslaciones, rotaciones, reflexiones, dilaciones; y las ideas acerca de congruencia y semejanza para describir y analizar figuras bidimensionales y para resolver problemas. Demostrarán que la suma de los ángulos en un triángulo es el ángulo formado por una línea recta, y que varias configuraciones de líneas originan triángulos similares debido a que los ángulos creados cuando una transversal corta líneas paralelas. Los estudiantes entenderán el enunciado del teorema de Pitágoras y su recíproco, podrán explicar porque el teorema de Pitágoras tiene cabida, por ejemplo al descomponer un cuadrado de dos formas distintas. Aplicarán el teorema de Pitágoras para encontrar distancias entre dos puntos en el plano de coordenadas, para encontrar longitudes y analizar polígonos. Los estudiantes completarán su trabajo con respecto al volumen en conos, cilindros y esferas.

Prácticas matemáticas

1. Dar sentido a los problemas y perseverar para solucionarlos.
2. Razonar de manera abstracta y cuantitativa.
3. Generar argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.
4. Hacer modelos matemáticos.
5. Usar las herramientas adecuadas estratégicamente.
6. Prestar atención a la precisión.
7. Buscar y hacer uso de la estructura.
8. Buscar y expresar regularidad en el razonamiento repetido.

Generalidades del Grado 8.º

El sistema numérico
- Saber que hay números que no son racionales y aproximarlos mediante números racionales.

Expresiones y ecuaciones
- Trabajar con radicales y exponentes enteros.
- Entender las conexiones entre las relaciones proporcionales, líneas y ecuaciones lineales.
- Analizar y resolver ecuaciones lineales y pares de ecuaciones lineales simultáneas.

Funciones
- Definir, evaluar y comparar funciones.
- Utilizar funciones para modelar relaciones entre cantidades.

Geometría
- Entender congruencia y semejanza utilizando modelos físicos, transparencias o software de geometría.
- Entender y aplicar el teorema de Pitágoras.
- Resolver problemas matemáticos y de la vida real que involucren el volumen de cilindros, conos y esferas.

Estadística y probabilidad
- Investigar patrones de asociación en datos de doble variable.

El sistema numérico 8.NS

Saber que hay números que no son racionales y aproximarlos mediante números racionales.

1. Saber que los números que no son racionales son llamados irracionales. Entender de manera informal que cada número tiene una expansión decimal; para los números racionales mostrar que la expansión decimal se repite eventualmente y convertir una expansión decimal la cual se repite eventualmente en un número racional.
2. Utilizar aproximaciones racionales de números irracionales para comparar el tamaño de los números irracionales, localizarlos de forma aproximada en un diagrama de números lineales y estimar el valor de las expresiones (p.ej. π^2). Por ejemplo, *truncando la expansión decimal de $\sqrt{2}$, mostrar que la $\sqrt{2}$, se encuentra entre 1 y 2, y después entre 1.4 y 1.5, después explicar cómo continuar para obtener mejores aproximaciones.*

Expresiones y ecuaciones 8.EE

Trabajar con radicales y exponentes enteros.

1. Entender y aplicar las propiedades de los exponentes enteros para generar expresiones numéricas equivalentes. Por ejemplo, $3^2 \times 3^{-5} = 3^{-3} = 1/3^3 = 1/27$.
2. Utilizar los símbolos de raíz cuadrada y cúbica para representar las soluciones a ecuaciones de la forma $x^2 = p$ y $x^3 = p$, donde p es un número racional positivo. Evaluar raíces cuadradas de cuadrados exactos y raíces cúbicas de cubos exactos. Entender porque $\sqrt{2}$ es irracional.
3. Utilizar números expresados en la forma de un solo dígito por un número entero de base 10 para estimar cantidades muy grandes o muy pequeñas, y para expresar cuantas veces a lo mucho uno es más grande que el otro. *Por ejemplo, estimar la población de los Estados Unidos como 3 veces 10^8 y la población del mundo como 7 veces 10^9, y determinar que la población del mundo es 20 veces más grande.*
4. Realizar operaciones con números expresados en notación científica, incluyendo problemas donde se utiliza la notación decimal y también la notación científica. Utilizar la notación científica y escoger unidades del tamaño adecuado para medir cantidades muy grandes o muy pequeñas (p. ej. utilizar milímetros por año para el desplazamiento del lecho marino). Interpretar la notación científica que ha sido generada mediante tecnología.

Entender las conexiones entre las relaciones proporcionales, líneas y ecuaciones lineales.

5. Graficar relaciones proporcionales, interpretando la razón de la unidad como la pendiente de la gráfica. Comparar dos relaciones proporcionales diferentes representadas de distintas formas. Por ejemplo, comparar una gráfica de distancia-tiempo con una ecuación de distancia-tiempo, para determinar cual de dos objetos en movimiento tiene mayor velocidad.
6. Utilizar triángulos similares para explicar por qué la pendiente m es la misma entre cualquiera de dos puntos distintos en una línea no vertical en el plano de la coordenada; derivar la ecuación y = mx para una línea recta través del origen y la ecuación $y = mx + b$ *para una* línea recta intercepta al eje vertical en b.

Analizar y resolver ecuaciones lineales y pares de ecuaciones lineales simultáneas.

7. Resolver ecuaciones lineales de una variable.
   a. Dar ejemplos de ecuaciones lineales de una variable con una solución, muchas soluciones infinitas o que no tienen solución. Mostrar cuál de estas posibilidades es para el caso de transformar sucesivamente la ecuación dada en formas más simples, hasta que resulte una ecuación equivalente de la forma $x = a$, $a = a$, ó $a = b$ *(*donde a y b son números diferentes).
   b. Resolver ecuaciones lineales con coeficientes de número racional, incluyendo ecuaciones cuyas soluciones requieren expresiones expandidas utilizando la propiedad distributiva y juntar términos similares.
8. Analizar y resolver pares de ecuaciones lineales simultáneas.
   a. Entender que la soluciones a un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables corresponden a puntos de intersección de sus gráficas, debido a que los puntos de intersección satisfacen ambas ecuaciones simultáneamente.
   b. Resolver sistemas de dos ecuaciones lineales de dos variables de forma algebraica y estimar las soluciones mediante la gráfica de las ecuaciones. Resolver casos simples mediante la inspección. Por ejemplo, $3x + 2y = 5$ y $3x + 2y = 6$ no tienen solución *porque* $3x + 2y$ no puede ser simultáneamente 5 y 6.
   c. Resolver problemas del mundo real y matemáticos que llevan a ecuaciones lineales de dos variables. *Por ejemplo, dadas las coordenadas de dos pares de puntos, determinar si la línea a través del primer par de puntos se intercepta con la línea a través del segundo par.*

Funciones 8.F

Definir, evaluar y comparar funciones.

1. Entender que una función es una regla que asigna a cada entrada exactamente una salida. La gráfica de una función es el conjunto ordenado de pares que consisten de una entrada a la que corresponde un resultado de salida.[1]
2. Comparar las propiedades de dos funciones cada una representa de distinta forma (algebraicamente, gráficamente, numéricamente en tablas o por medio de descripción verbal). *Por ejemplo, dada una función lineal representada mediante una tabla de valores y una función lineal representada mediante una expresión algebraica, determinar cuál función tiene la mayor razón de cambio.*
3. Interpretar la ecuación $y = mx + b$ *como definición de una función lineal, cuya gráfica es una línea recta; dar ejemplos de funciones que no son lineales. Por ejemplo, la función* $A = s^2$ *para el área de un cuadrado como una función de la longitud de uno de sus lados es no lineal, debido a que su gráfica contiene los puntos (1,1), (2,4) y (3,9), los cuales no se encuentran en línea recta.*

Utilizar funciones para modelar relaciones entre cantidades.

4. Construir una función para modelar una relación lineal entre dos cantidades. Determinar la razón de cambio y el valor inicial de la función a partir de la descripción de una relación o de dos valores (x, y), incluyendo la lectura de estos desde una tabla o de una gráfica. Interpretar la razón de cambio y el valor inicial de una función lineal en términos de la situación de su modelo y en términos de su gráfica o de la tabla de valores.
5. Describir cualitativamente la relación funcional entre dos cantidades mediante el análisis de una gráfica (p. ej. si la función crece o decrece, de forma lineal o no lineal). Esbozar una gráfica que muestre las características cualitativas de una función que ha sido descrita verbalmente.

[1] La notación de función no es requerida en el Grado 8.º.

Geometría 8.G

Entender congruencia y semejanza utilizando modelos físicos, transparencias o software de geometría.

1. Verificar experimentalmente las propiedades de las rotaciones, reflexiones y traslaciones:
    a. Líneas son llevadas a las líneas y los segmentos de línea a los segmentos de línea de la misma longitud.
    b. Ángulos son llevados a ángulos de la misma medida.
    c. Líneas paralelas son llevadas a líneas paralelas.
2. Entender que una figura bidimensional es congruente a otra si la segunda puede ser obtenida a partir de la primera mediante una secuencia de rotaciones, reflexiones y traslaciones; a partir de dos figuras congruentes, describe una secuencia que muestre la congruencia entre ellas.
3. Describir los efectos de expansión, traslación, rotación y reflexión de figuras de dos dimensiones utilizando coordenadas.
4. Entender que una figura bidimensional es similar a otra si la segunda puede ser obtenida a partir de la primera mediante una secuencia de rotaciones, reflexiones, traslaciones y expansiones; dadas dos figuras bidimensionales semejantes, describir una secuencia que muestre la semejanza entre ellas.
5. Utilizar argumentos informales para establecer hechos acerca de la suma de los ángulos y ángulos exteriores de triángulos, acerca de ángulos creados cuando líneas paralelas se cortan por medio de una transversal, y el criterio de ángulo-ángulo para la semejanza de triángulos. *Por ejemplo, coloque tres copias del mismo triangulo de forma que la suma de los tres ángulos aparece para formar una recta, y aporte un argumento en términos de las transversales de porqué esto es así.*

Entender y aplicar el teorema de Pitágoras.

6. Explicar y comprobar el teorema de Pitágoras y su recíproco.
7. Aplicar el teorema de Pitágoras para determinar las longitudes desconocidas de triángulos rectángulos en problemas del mundo real y matemáticos de 2 y 3 dimensiones.
8. Aplicar el teorema de Pitágoras para encontrar la distancia entre dos puntos en un sistema de coordenadas.

Resolver problemas matemáticos y de la vida real que involucren el volumen de cilindros, conos y esferas.

9. Conocer las fórmulas para el volumen de conos, cilindros y esferas, utilizándolas para resolver problemas de la vida real y matemáticos.

Estadística y probabilidad 8.SP

Investigar patrones de asociación en datos de doble variable.

1. Construir e interpretar diagramas de puntos para datos de medición de doble variable e investigar patrones de asociación entre dos cantidades. Describir patrones tales como el agrupamiento, valores atípicos, asociación positiva o negativa, asociación lineal y asociación no lineal.
2. Conocer cómo las líneas rectas son ampliamente utilizadas para realizar modelos de relaciones entre dos variables cuantitativas. Para los diagramas de puntos que sugieren una asociación lineal, ajustar informalmente una línea recta e informalmente evaluar el ajuste del modelo juzgando la cercanía de los puntos de datos a la línea.
3. Utilizar la ecuación de un modelo lineal para resolver problemas en el contexto de la medición de datos de doble variable, interpretando la pendiente y la intercepción. *Por ejemplo, en un modelo lineal para un experimento de biología, interprete una pendiente de 1.5 cm/hr como el significado de que cada hora adicional de luz solar por día está asociada con 1.5 cm en la altura de plantas adultas.*
4. Entender que los patrones de sucesión también pueden ser observados en datos categóricos de doble variable mostrando frecuencias y frecuencias relativas en una tabla de doble entrada. Construir e interpretar una tabla de doble entrada resumiendo los datos en dos variables categóricas recopiladas de los mismos sujetos. Utilizar frecuencias relativas calculadas mediante filas o columnas para describir la posible asociación entre dos variables. *Por ejemplo, recopilar datos de estudiantes en tu clase si tienen hora límite en las noches de escuela y si tienes asignados deberes en casa. ¿Hay evidencia de que aquellos que tienen hora límite también tienden a tener deberes asignados?*

Estándares de matemáticas en escuelas secundarias

Los estándares para escuela secundaria especifican el tipo de matemáticas que todos los estudiantes deberán estudiar para prepararse rumbo a la universidad o preparación profesional. Las clases de matemáticas adicionales que los estudiantes deberían aprender para tomar cursos avanzados tales como el cálculo, estadística avanzada o matemáticas discretas se indican mediante (+), como en el ejemplo:

> (+) Representar números complejos en el plano complejo de forma rectangular y polar (incluyendo los números reales e imaginarios).

Todas los estándares sin un símbolo (+) deberán estar en el currículum de matemáticas como un para todos los estudiantes a universidad y los de preparación profesional de carrera. Las normas con un símbolo (+) también pueden aparecer en cursos diseñados para todos los estudiantes.

Los estándares para escuela secundaria se enumeran en categorías conceptuales:

- Números y cantidades
- Álgebra
- Funciones
- Creación de modelos
- Geometría
- Estadística y probabilidad

Las categorías conceptuales describen una vista coherente de las matemáticas de secundaria; el trabajo de un estudiante con funciones por ejemplo, pasa a través de un número de fronteras de un curso tradicional, potencialmente a través de, y hasta el cálculo.

La creación de modelos se encuentra mejor interpretada, no como una colección de temas aislados sino en relación con otros estándares. La creación de modelos matemáticos es un estándar de la práctica matemática y las normas específicas para la creación de modelos aparecen a lo largo de las normas para secundaria indicadas mediante un símbolo de estrella (*). El símbolo de la estrella en ocasiones aparece en el encabezado de un grupo de estándares; en ese caso, deberá entenderse el aplicar todos los estándares a ese grupo.

Matemáticas - Números y cantidades de secundaria: Introducción

Números y sistemas numéricos.

Durante años desde la educación preescolar hasta el octavo grado, los estudiantes repetidamente expanden su concepción del concepto de número. A primera vista, "números" significa "contar números": 1, 2, 3.... Pronto después de eso, el 0 es usado para representar "ninguno" y los números naturales están formados por la cuenta de los números junto con el cero. La siguiente parte son las fracciones. Primero, las fracciones son escasamente números principalmente representados con gráficos. Sin embargo con el tiempo los estudiantes entienden la división de fracciones, teniendo un fuerte concepto de las fracciones como números y cómo se conectan con estos, a través de sus representaciones decimales con el sistema de base 10 utilizado para representar los números naturales. Durante la escuela intermedia, las fracciones son ampliadas con fracciones negativas para formar los números racionales. En el Grado 8.º, los estudiantes amplían este sistema una vez más aumentando el concepto de los números racionales con el de los números irracionales para formar el conjunto de los números reales. En la escuela secundaria, los estudiantes estarán una vez más expuestos a la extensión del concepto de número, cuando los números reales sean expandidos mediante el concepto del número imaginario para formar los números complejos.

Con la ampliación del concepto de número, el significado de la suma, resta, multiplicación y división también se amplía. En cada nuevo sistema de números — enteros, racionales y complejos — las cuatro operaciones permanecen igual de dos formas importantes: Tienen propiedades conmutativa, asociativa y distributiva y su nuevo significado es consistente con sus predecesores.

Ampliar las propiedades de los exponentes del número entero lleva a una nueva y productiva notación. Por ejemplo, las propiedades de los exponentes de los números enteros sugieren que (51/3)3 debería ser 5(1/3)3 = 51 = 5 y que 51/3 debería ser la raíz cubica de 5.

Las calculadoras, hojas de cálculo y sistemas de álgebra computacional, pueden aportar medios para que los estudiantes se familiaricen mejor con estos nuevos sistemas numéricos y su notación. Pueden ser utilizados para generar datos para experimentos numéricos y entender los trabajos de matrices, vectores y álgebra de números complejos además de experimentar con exponentes no enteros.

Cantidades.

En los problemas del mundo real, las respuestas usualmente no son números sino cantidades: números con unidades las cuales involucran medidas. El trabajo de los estudiantes con medidas hasta el Grado 8.º, en primera instancia involucra mediciones comunes utilizando atributos tales como la longitud, área y volumen. En la escuela secundaria, los estudiantes encontrarán amplia variedad de unidades en la creación de modelos, p. ej. aceleración, conversión de divisas, cantidades derivadas tales como persona-hora y grados de calor por día, tasas en ciencias sociales, tales como ingreso per cápita y de la vida cotidiana como por ejemplo los puntos anotados por juego o el promedio de bateo. También encontrarán situaciones nuevas en las cuales por sí mismos deben concebir los atributos de interés. Por ejemplo, encontrar una buena medición de la seguridad de toda una autopista, ellos podrán proponer mediciones como las de conteo de víctimas por año, víctimas por año y por conductor o víctimas por milla-vehículo viajada. Tal proceso conceptual puede ser llamado cuantificación. La cuantificación es importante para la ciencia, como cuando el área de una superficie de repente "sobresale" como una variable importante de evaporación. La cuantificación también es importante para las compañías, las cuales deben conceptualizar atributos relevantes y crear o elegir las mediciones adecuadas para estos.

Prácticas matemáticas

1. Dar sentido a los problemas y perseverar para solucionarlos.
2. Razonar de manera abstracta y cuantitativa.
3. Generar argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.
4. Hacer modelos matemáticos.
5. Usar las herramientas adecuadas estratégicamente.
6. Prestar atención a la precisión.
7. Buscar y hacer uso de la estructura.
8. Buscar y expresar regularidad en el razonamiento repetido.

Números y cantidades — Generalidades

El sistema de los números reales
- Extender las propiedades de los exponentes a exponentes racionales
- Utilizar las propiedades de los números racionales e irracionales.

Cantidades
- Razonar cuantitativamente y utilizar unidades para resolver problemas

El sistema de los números complejos
- Realizar operaciones aritméticas con números complejos
- Representar números complejos y sus operaciones en el plano complejo
- Utilizar números complejos en identidades polinómicas y ecuaciones

Cantidades vectoriales y matriciales
- Representar y crear modelos con cantidades vectoriales.
- Realizar operaciones con vectores.
- Realizar operaciones en matrices y utilizar las matrices en aplicaciones.

El sistema de los números reales N-RN

Ampliar las propiedades de los exponentes a los exponentes racionales.
1. Explicar cómo la definición del significado de los exponentes racionales sigue de ampliar las propiedades de los exponentes enteros a esos valores, permitiendo una notación para los radicales en términos de exponentes racionales. *Por ejemplo, definimos* $5^{1/3}$ *para ser el cubo de raíz de 5 porque deseamos* $(5^{1/3})^3 = 5^{(1/3)3}$ *para aplicarlo de forma que* $(5^{1/3})^3$ *debe ser igual a 5.*
2. Escribir expresiones que involucran radicales y exponentes racionales utilizando las propiedades de los exponentes.

Utilizar las propiedades de los números racionales e irracionales.
3. Explicar porque la suma o producto de dos números racionales es racional; que la suma de un número racional un número irracional es irracional; que el producto de un número racional distinto de cero y de un número racional es irracional.

Cantidades N-Q

Razonar cuantitativamente y utilizar unidades para resolver problemas.
1. Utilizar unidades una forma de entender problemas y para guiar la solución de problemas de pasos múltiples; elegir interpretar unidades de forma consistente en fórmulas; elegir e interpretar la escala y el origen en las gráficas y datos mostrados.
2. Definir las cantidades apropiadas para el propósito descriptivo del modelo.
3. Elegir un nivel de precisión apropiado para las limitaciones de la medición al realizar el informe de cantidades.

El sistema de los números complejos N-CN

Realizar operaciones aritméticas con números complejos.
1. Saber que existe un número complejo i tal que $i^2 = -1$, y que cada número complejo tiene la forma $a + bi$ *con una* a *y* b reales.
2. Utilizar la relación $i^2 = -1$ y las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva para sumar, restar y multiplicar números complejos
3. (+) Encontrar el conjugado de un número complejo; utilizar los conjugados para encontrar el módulo y los cocientes de números complejos.

Representar números complejos y sus operaciones en el plano complejo.

4. (+) Representar números complejos en el plano complejo en forma rectangular y polar (incluyendo los números imaginarios y reales) y explicar porque las formas rectangular y polar de un número complejo dado, representan el mismo número.
5. (+) Representar la suma, resta, multiplicación y conjugación de números complejos de forma geométrica en el plano complejo; utilizar las propiedades de esta representación para su cómputo. *Por ejemplo,* $(-1 + \sqrt{3}\, i)^3 = 8$ *porque* $(-1 + \sqrt{3}\, i)$ *tiene modulo de 2 y argumento de 120°.*
6. (+) Calcular la distancia entre números en el plano complejo como el módulo de la diferencia y el punto medio de un segmento como el promedio de los números en sus puntos finales.

Utilizar números complejos en identidades polinómicas y ecuaciones.

7. Resolver las ecuaciones cuadráticas con coeficientes reales que tienen soluciones complejas.
8. (+) Ampliar las identidades polinómicas a los números complejos.
   Por ejemplo, reescribir $x^2 + 4$ *como* $(x + 2i)(x – 2i)$.
9. (+) Entender el Teorema fundamental del álgebra; mostrar que es verdadero para polinomios cuadráticos.

Cantidades vectoriales y matriciales N-VM

Representar y crear modelos con cantidades vectoriales.

1. (+) Reconocer que las cantidades vectoriales tienen a la vez magnitud y dirección. Representar cantidades vectoriales por medio de segmentos de línea dirigidos y utilizando los símbolos adecuados para los vectores y sus magnitudes (p. ej. $\boldsymbol{v}$, $|\boldsymbol{v}|$, $||\boldsymbol{v}||$, v).
2. (+) Encontrar los componentes de un vector mediante la resta de coordenadas de un punto inicial de las coordenadas de un punto terminal.
3. (+) Resolver problemas que involucran velocidad y otras cantidades que pueden ser representadas mediante vectores.

Realizar operaciones con vectores.

4. (+) Sumar y restar vectores.
   a. Sumar vectores de componente a componente y por medio de la regla del paralelogramo. Entender que la magnitud de la suma de dos vectores típicamente no es la suma de las magnitudes.
   b. Dados dos vectores en la forma de magnitud y dirección, determine la magnitud y dirección de la suma de ambos.
   c. Entender que la resta de vectores $\boldsymbol{v} – \boldsymbol{w}$ como $\boldsymbol{v} + (–\boldsymbol{w})$, donde $-w$ es el inverso aditivo de w, *con la misma magnitud que* w y apuntando en dirección opuesta. Representar la resta vectores gráficamente conectando las puntas en el orden apropiado, y realizando la resta de vectores, componente a componente.
5. (+) Multiplicar un vector por un escalar.
   a. Representar la multiplicación escalar gráficamente escalando vectores y posiblemente invirtiendo su dirección; realizar la multiplicación escalar componente a componente, p. ej., como en $c(v_x, v_y) = (cv_x, cv_y)$.
   b. Computar la magnitud de un múltiplo escalar cv usando $||c\boldsymbol{v}|| = |c|\boldsymbol{v}$. Computar la dirección de cv sabiendo que cuando $|c|\boldsymbol{v} \neq 0$, la dirección de cv es cualquiera siguiendo $\boldsymbol{v}$ (para $c > 0$) o al contrario de $\boldsymbol{v}$ (para $c < 0$).

Realizar operaciones en matrices y utilizar las matrices en aplicaciones.

6. (+) Utilizar las matrices para representar y manipular datos, p. ej., para representar pagos o incidencias de relaciones en una red.
7. (+) Multiplicar matrices por escalares para producir nuevas matrices, p. ej., por ejemplo cuando todas las ganancias en un juego se duplican.
8. (+) Sumar, restar el y multiplicar matrices de dimensiones apropiadas.
9. (+) Comprender que distinto de la multiplicación de números, la multiplicación de matrices por matrices cuadradas no es una operación conmutativa, pero todavía satisface las propiedades asociativa y distributiva.
10. (+) Comprender que el cero y la identidad de matrices juegan un rol en la suma y multiplicación de forma similar al rol del 0 y el 1 en los números reales. La determinante de una matriz cuadrada es distinta de cero si sólo la matriz tiene un multiplicativo inverso.
11. (+) Multiplicar un vector (considerado como una matriz de una columna) por una matriz de dimensiones adecuadas para producir otro vector. Trabajar con matrices como transformaciones de vectores.
12. (+) Trabajar con matrices de 2 x 2 como transformaciones en el plano e interpretar el valor absoluto de la determinante en términos de área.

Matemáticas - Álgebra de secundaria: Introducción

Expresiones.

Una expresión es el registro de un calculo con números, símbolos que representan números, operaciones aritméticas, exponenciación y en niveles más avanzados, la operación para evaluar una función. La convención acerca del uso de paréntesis y el orden de las operaciones asegura la desambiguación de cada una de las expresiones. La creación de una expresión que describe un cálculo que involucra una cantidad general requiere la habilidad de expresar el cálculo en términos generales, haciendo un abstracto de instancias especificas.

La lectura de la expresión con entendimiento involucra al análisis de su estructura subyacente. Esto puede sugerir que se escriba la expresión de forma diferente pero a la vez equivalente para mostrar diferentes aspectos de su significado. Por ejemplo, $p + 0.05p$ puede ser interpretado como la suma del 5% de impuesto a un precio p. Reescribiendo $p + 0.05p$ como $1.05p$ muestra que la suma del impuesto es lo mismo que la multiplicación del precio por un factor constante.

Las manipulaciones algebraicas están gobernadas por las propiedades de operaciones y exponentes, así como las convenciones de la notación algebraica. En ocasiones, una expresión es el resultado de aplicar operaciones a expresiones simples. Por ejemplo, $p + 0.05p$ es la suma de las expresiones simples p y $0.05p$. Ver una expresión como el resultado de la operación de expresiones simples, algunas veces puede esclarecer su estructura subyacente.

Una hoja de cálculo o un sistema de álgebra por computadora (CAS, por sus siglas en inglés) pueden ser utilizados para experimentar con expresiones algebraicas, realizar manipulaciones algebraicas complejas y entender como las manipulaciones algebraicas se comportan.

Ecuaciones y desigualdades.

Una ecuación es una declaración de igualdad entre dos expresiones, frecuentemente vista como una pregunta que solicita saber qué valores de las variables en las expresiones a cada lado de la ecuación son iguales. Estos valores son las soluciones de la ecuación. Una identidad, en contraste, es verdadera para todos los valores de las variables; las identidades frecuentemente se desarrollan reescribiendo una expresión de forma equivalente.

Las soluciones de una ecuación de una variable para un conjunto de números; las soluciones de una ecuación de dos variables de un conjunto ordenado de pares de números, que pueden ser representados en el plano de coordenadas. Dos o más ecuaciones y/o desigualdades del sistema. Una solución para un sistema de este tipo deberá satisfacer cada una de las ecuaciones y desigualdades en el sistema.

Una ecuación frecuentemente puede ser solucionada mediante la deducción sucesiva de una o más ecuaciones simples. Por ejemplo, se puede sumar la misma constante en ambos lados sin cambiar la soluciones, elevar al cuadrado ambos lados puede llevar a soluciones extrañas. La competencia estratégica para aplicar la solución incluye ir hacia delante en busca de manipulaciones productivas y anticipar la naturaleza y número de soluciones.

Algunas ecuaciones no tienen soluciones en un sistema de números dados, pero tienen una solución en sistemas más grandes. Por ejemplo, la solución de $x + 1 = 0$ es un entero, no un número natural; la solución de $2x + 1 = 0$ es un número racional, no un número entero; la soluciones de $x^2 – 2 = 0$ son números reales, no números racionales; y la soluciones de $x^2 + 2 = 0$ son números complejos, no números reales.

Las mismas técnicas de solución para resolver ecuaciones pueden ser utilizadas para reacomodar fórmulas. Por ejemplo, la fórmula para el área de un trapezoide, $A = ((b_1+b_2)/2)h$, puede ser resuelta mediante h utilizando el mismo proceso deductivo.

Las desigualdades pueden ser solucionadas razonando acerca de las propiedades de la desigualdad. Muchas, pero no todas las propiedades de la igualdad continúan siendo aplicables a las desigualdades y pueden ser útiles para resolverlas.

Relaciones con funciones y creación de modelos matemáticos.

Las expresiones pueden definir funciones y las expresiones equivalentes definen la misma función. Preguntando cuando dos funciones tienen el mismo valor para la misma entrada nos lleva a una ecuación; el graficar las dos funciones permite encontrar soluciones aproximadas para la ecuación. Convertir una descripción verbal en una ecuación, desigualdad o alguno de estos sistemas, es una habilidad fundamental para crear modelos matemáticos.

Prácticas matemáticas

1. Dar sentido a los problemas y perseverar para solucionarlos.
2. Razonar de manera abstracta y cuantitativa.
3. Generar argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.
4. Hacer modelos matemáticos.
5. Usar las herramientas adecuadas estratégicamente.
6. Prestar atención a la precisión.
7. Buscar y hacer uso de la estructura.
8. Buscar y expresar regularidad en el razonamiento repetido.

Álgebra - generalidades

Ver la estructura en expresiones
- Interpreta la estructura de expresiones
- Escribir expresiones de forma equivalente para resolver problemas

Aritmética con expresiones polinomicas y expresiones racionales
- Realizar operaciones aritméticas en expresiones polinomicas
- Comprender la relación entre los ceros y los factores de polinomios
- Utilizar identidades polinomicas para resolver problemas
- Reescribir expresiones racionales

Creación de ecuaciones
- Crear ecuaciones que describan números o relaciones

Razonamiento con ecuaciones y desigualdades
- Comprender la solución de ecuaciones como parte de un proceso de razonamiento y explicar el razonamiento
- Resolver ecuaciones y desigualdades de una variable
- Resolver sistemas de ecuaciones
- Representar y resolver ecuaciones y desigualdades gráficamente

Observar la estructura de expresiones A-SSE

Interpretar la estructura de expresiones.

1. Interpretar expresiones que representan una cantidad en términos de su contexto.
   a. Interpretar partes una expresión tales como, términos, factores y coeficientes.
   b. Interpretar expresiones complicadas mediante la observación de una o más de sus partes como una sola entidad. *Por ejemplo, interpretar $P(1+r)^n$ como el producto de P y un factor no dependiente de P.*
2. Utilizar la estructura de una expresión para identificar formas de reescribirla. *Por ejemplo, véase $x^4 – y^4$ como $(x^2)^2 – (y^2)^2$, de este modo reconociéndola comuna diferencia de cuadrados que pueden ser factorizados como $(x^2 – y^2)(x^2 + y^2)$.*

Escribir expresiones en formas equivalentes para resolver problemas.

3. Elija y produzca una forma equivalente de una expresión para revelar y explicar propiedades de cantidad representadas mediante la expresión.
   a. Actualice una expresión cuadrática para revelar los ceros de la función que define.
   b. Completar el cuadrado en una expresión cuadrática para encontrar el valor máximo y mínimo de la función que define.
   c. Utiliza las propiedades de los exponentes para transformar expresiones de funciones exponenciales. *Por ejemplo, la expresión 1.15^t puede reescribirse como $(1.15^{1/12})^{12t} \approx 1.012^{12t}$ para revelar la tasa de interés mensual equivalente aproximado, si la tasa anual es del 15%.*
4. Derive la fórmula de la suma de una serie geométrica infinita (cuando el radio común no es igual a 1) y utiliza la fórmula para resolver problemas. Por ejemplo, calcule los pagos de una hipoteca.

Aritmética con expresiones polinómicas y racionales A-APR

Realizar operaciones aritméticas con polinomios.

1. Comprender que los polinomios forman un sistema análogo a los números enteros, es decir, que son cerrados bajo las operaciones de suma, resta y multiplicación, sumar, restar y multiplicar polinomios.

Entender la relación entre ceros y factores de polinomios.

2. Entender y aplicar el teorema del resto: Para un polinomio $p(x)$ y un número a, el resto de la división por $x – a$ es $p(a)$, así que $p(a) = 0$ si y solo si $(x – a)$ es un factor de $p(x)$.
3. Identificar los ceros de polinomios cuando se encuentran disponibles factorizaciones adecuadas y utilizar los ceros para construir una gráfica aproximada de la función definida por el polinomio.

Utilizar identidades polinómicas para resolver problemas.

4. Probar identidades polinómicas y utilizarlas para describir relaciones numéricas. *Por ejemplo, la identidad polinómica* $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 – y^2)^2 + (2xy)^2$ *puede usarse para generar ternas pitagóricas.*
5. (+) Entender y aplicar el teorema del binomio para la expansión de $(x + y)^n$ en potencias de x y y para un número entero positivo n, donde x y y son cualquier número, con coeficientes determinados, por ejemplo el triángulo de Pascal.[1]

Reescribir expresiones racionales.

6. Reescribir expresiones racionales simples en formas diferentes; escribir $^{a(x)}/_{b(x)}$ en la forma $q(x) + {}^{r(x)}/_{b(x)}$, donde $a(x)$, $b(x)$, $q(x)$, y $r(x)$ son polinomios con el grado de $r(x)$ menor que el grado de $b(x)$, usando la inspección, división larga o en el caso de los ejemplos más complicados con un sistema de álgebra computarizado.
7. (+) Comprender que las expresiones racionales forman un sistema análogo a los números racionales, cerrado bajo la suma, resta, multiplicación y división por una expresión racional diferente a cero; sumar, restar, multiplicar y dividir expresiones racionales.

[1] El teorema del binomio puede ser comprobado mediante una inducción matemática o mediante un argumento combinatorio.

Creación de ecuaciones A-CED

Crear ecuaciones que describan números o relaciones.

1. Crear ecuaciones y desigualdades de una variable y utilizarlas para resolver problemas. Incluir ecuaciones que surgen de *funciones lineales y cuadráticas y de funciones simples racionales y exponenciales.*
2. Crear ecuaciones de dos o más variables para representar relaciones entre cantidades; graficar ecuaciones en los ejes de coordenadas con etiquetas y escalas.
3. Representar las restricciones por ecuación o desigualdad o por sistema de ecuaciones y/o desigualdades, ademas de interpretar las soluciones como viables o no viables en el contexto de creación de modelos. Por ejemplo, representar desigualdades describiendo límites nutricionales y de costo en combinaciones de distintos alimentos.
4. Reacomodar fórmulas para resaltar una cantidad de interés, utilizando el mismo razonamiento que se utiliza para resolver ecuaciones. *Por ejemplo, reacomodar la ley de Ohm $V = IR$ para resaltar la resistencia R.*

Razonamiento con ecuaciones y desigualdades A-REI

Comprender la solución de ecuaciones como parte de un proceso de razonamiento y explicar el razonamiento

1. Explicar cada uno de los pasos para resolver una ecuación simple a partir de la igualdad de números declarada en el paso anterior, iniciando del supuesto de que la ecuación original tiene una solución. Construir un argumento viable para justificar un método de solución.
2. Resolver ecuaciones racionales simples y radicales de una variable y dar ejemplos que muestren cómo pueden aparecer soluciones ajenas.

Resolver ecuaciones y desigualdades de una variable.

3. Resolver ecuaciones y desigualdades de una variable, incluyendo ecuaciones con coeficientes representados mediante letras.
4. Resolver ecuaciones cuadráticas de una variable.
    a. Utilizar el método de completar el cuadrado para transformar cualquier ecuación cuadrática en x en una ecuación de la forma $(x – p)^2 = q$ que tiene las mismas soluciones. Derivar la fórmula de las cuadráticas a partir de esta forma.
    b. Resolver ecuaciones cuadráticas mediante inspección (p. ej. para $x^2 = 49$), tomando las raíces cuadradas, completando el cuadrado, la fórmula cuadrática y factorizando, tanto como sea apropiado en la forma inicial de la ecuación. Reconocer cuando la fórmula cuadrática resulta en soluciones complejas y escribirlas como $a \pm bi$ para los números reales a y b.

Resolver sistemas de ecuaciones.

5. Probar que, dado un sistema de dos ecuaciones de dos variables, reemplazando una ecuación por la suma de esa ecuación y un múltiplo de la otra produce un sistema con las mismas soluciones.
6. Resolver sistemas de ecuaciones lineales de forma exacta y aproximada (p. ej. con gráficas), concentrándose en pares de ecuaciones lineales de dos variables.
7. Resolver un sistema simple que conste de una ecuación lineal y una ecuación cuadrática de dos variables de forma algebraica y gráfica. Por ejemplo, encontrar los puntos de intersección entre la línea $y = –3x$ y el círculo $x^2 + y^2 = 3$.
8. (+) Representar un sistema de ecuaciones lineales como la ecuación de una sola matriz en una variable vectorial.
9. (+) Encontrar la inversa de la matriz si existe y utilizarla para resolver sistemas de ecuaciones lineales (utilizando medios tecnológicos para matrices de dimensiones 3 x 3 o mayores).

Representar y resolver ecuaciones y desigualdades gráficamente.

10. Comprender que la gráfica de una ecuación de dos variables es el conjunto de todas sus soluciones representadas en el plano de coordenadas, que forma frecuentemente una curva (la cual podría ser una línea).
11. Explicar porque las coordenadas x de los puntos donde intersectan las gráficas de las ecuaciones $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son las soluciones para la ecuación $f(x) = g(x)$; encontrar las soluciones aproximadas, p. ej., mediante el uso de tecnología graficar las funciones, realizar tablas de valores o encontrando aproximaciones sucesivas. Incluir casos donde $f(x)$ y/o $g(x)$ son funciones lineales, polinómicas, racionales, de valor absoluto, exponenciales y logarítmicas.
12. Graficar las soluciones de una desigualdad lineal de dos variables como un medio plano (excluyendo los límites en el caso de una desigualdad estricta), y platicar el conjunto de soluciones para un sistema de desigualdades lineales de dos variables como la intersección de los medios planos correspondientes.

Matemáticas - Funciones de secundaria: Introducción

Las funciones describen situaciones donde una cantidad determina a otra. Por ejemplo, el interés en la inversión de \$10,000 con una tasa anual del 4.25% es una función de longitud de tiempo del dinero invertido. Debido a que continuamente realizamos teorías acerca de las dependencias entre cantidades en la naturaleza y la sociedad, las funciones son herramientas importantes en la construcción de modelos matemáticos.

En las matemáticas escolares, las funciones usualmente tienen entradas numéricas y los resultados frecuentemente se definen mediante una expresión algebraica. Por ejemplo, el tiempo en horas que toma a un automóvil recorrer 100 millas es una función de la velocidad del automóvil en millas por hora, v; la regla $T(v) = 100/v$ expresa esta relación algebraicamente y define la función cuyo nombre es T.

Este conjunto de entradas para una función es llamado su dominio. Frecuentemente inferimos que el dominio sean todas las entradas por las cuales la expresión que define una función tiene un valor, o por la cual la función tiene sentido en un contexto dado.

Una función puede ser descrita de varias formas, tales como una gráfica (p. ej. el trazo de un sismógrafo); mediante una regla verbal, como en "Te daré el Estado si tú me das la capital de la ciudad"; mediante una expresión algebraica como $f(x) = a + bx$; o mediante una regla recursiva. La gráfica de una función frecuentemente es una forma útil de visualizar la relación de los modelos de la función, y manipulando la expresión matemática de una función podemos ver mejor las propiedades de la función.

Las funciones presentadas como expresiones pueden modelar muchos fenómenos importantes. Dos familias importantes de funciones que se caracterizan por leyes de crecimiento son las funciones lineales las cuales crecen en una tasa constante, y las funciones exponenciales las cuales crecen en una tasa de porcentaje constante. Las funciones lineales con un término constante de cero describen relaciones proporcionales.

Se puede utilizar una herramienta para graficar o un sistema de álgebra computacional para experimentar con las propiedades de estas funciones y sus gráficas y construir modelos computacionales de funciones, incluyendo funciones definidas recursivamente.

Conexiones para expresiones, ecuaciones, creación de modelos y coordenadas.

Determinar un resultado de salida para una entrada en particular involucra evaluar una expresión; encontrar las entradas que producen el resultado dado involucra resolver una ecuación. Las preguntas acerca de cómo dos funciones tienen el mismo valor para la misma entrada nos lleva a ecuaciones, cuyas soluciones pueden ser visualizadas como la intersección de sus gráficas. Debido a que las funciones describen relaciones entre cantidades, se utilizan frecuentemente para la creación de modelos. Algunas veces las funciones están definidas mediante un proceso recursivo, el cual puede ser mostrado de manera efectiva utilizando una hoja de cálculo u otra tecnología.

Prácticas matemáticas

1. Dar sentido a los problemas y perseverar para solucionarlos.
2. Razonar de manera abstracta y cuantitativa.
3. Generar argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.
4. Hacer modelos matemáticos.
5. Usar las herramientas adecuadas estratégicamente.
6. Prestar atención a la precisión.
7. Buscar y hacer uso de la estructura.
8. Buscar y expresar regularidad en el razonamiento repetido.

Generalidades de funciones

Interpretando funciones
- Comprender el concepto de función y utilizar la notación de función
- Interpretar las funciones que surgen en las aplicaciones en los términos del contexto
- Analizar funciones utilizando diferentes representaciones

Construir funciones
- Construir una función que modela una relación entre dos cantidades
- Construir nuevas funciones a partir de funciones existentes

Modelos lineales, cuadráticos y exponenciales
- Construir y comparar modelos lineales, cuadráticos y exponenciales para resolver problemas
- Interpretar expresiones para funciones en términos de la situación que modelan

Funciones trigonométricas
- Extender el dominio de las funciones trigonométricas utilizando el círculo unitario
- Realizar el modelo del fenómeno periódico con funciones trigonométricas
- Probar y aplicar identidades trigonométricas

Interpretando funciones F-IF

Comprender el concepto de función y utilizar la notación de función

1. Entender que la función de un conjunto (llamado el dominio) para otro conjunto (llamado el rango) asigna a cada elemento del dominio exactamente un elemento del rango. Si f es una función y x es un elemento de su dominio, entonces $f(x)$ denota el resultado de salida de f que corresponde al elemento de entrada x. La gráfica de f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.
2. Utilizar la notación de función, evaluar funciones para las entradas en sus dominios e interpretar enunciados que utilizan la notación de función en términos de su contexto.
3. Reconocer que secuencias son funciones, algunas veces definidas de forma recursiva, cuyos dominio es un subconjunto de los números enteros. *Por ejemplo, la secuencia de Fibonacci está definida recursivamente mediante* $f(0) = f(1) = 1$, $f(n+1) = f(n) + f(n-1)$ *para* $n \geq 1$.

Interpretar las funciones que surgen en las aplicaciones en los términos del contexto.

4. Para una función que modela una relación entre dos cantidades, interpretar las características clave de las gráficas y las tablas en términos de las cantidades y esbozar las gráficas que muestran las características claves dada una descripción verbal de la relación. Las características clave incluyen: intersecciones; intervalos donde la función se incrementa, decrementos positivos o negativos; máximos y mínimos relativos; simetrías; comportamiento extremo y periodicidad.
5. Relacionar el dominio de una función con su gráfica y donde sea aplicable, a la relación cuantitativa que describe. *Por ejemplo, si la función h(n) resulta en el número de personas-horas que toma ensamblar n motores en una fábrica, entonces los números enteros positivos podrían ser un dominio apropiado para la función.*
6. Calcular e interpretar la razón de cambio de una función (presentada de forma simbólica o como una tabla) en un intervalo especificado. Estima la razón de cambio de una gráfica.

Analizar funciones utilizando diferentes representaciones.

7. Graficar funciones expresadas simbólicamente y mostrar las características principales de la gráfica de forma manual en casos simples y utilizando la tecnología para casos más complicados.
    a. Graficar funciones lineales y cuadráticas mostrando las intersecciones, máximos y mínimos.
    b. Graficar funciones de raíz cuadrada, raíz cúbica y funciones definidas por segmentos, incluyendo funciones de escalón y de valor absoluto.
    c. Graficar funciones polinómicas, identificando los ceros cuando se encuentran disponibles las factorizaciones adecuadas y mostrando el comportamiento extremo.
    d. (+) Graficar funciones racionales identificando ceros y asintotas cuando se encuentran disponibles las factorizaciones adecuadas y mostrando el comportamiento extremo.
    e. Graficar funciones logarítmicas y exponenciales, mostrando las intersecciones y el comportamiento extremo, funciones trigonométricas mostrando periodo, línea media y la amplitud.
8. Escribir una función definida por una expresión en formas distintas y equivalentes, para revelar y explicar distintas propiedades de la función.

a. Utilizar los procesos de factorizaciones y de completar el cuadrado en una función cuadrática para mostrar los ceros, valores extremos y la simetría de la gráfica, interpretando éstos en términos de un contexto.
b. Utilizar las propiedades de los exponentes para interpretar expresiones de funciones exponenciales. Por ejemplo, identificar el porcentaje de la razón de cambio en funciones tales como y = (1.02)t, y = (0.97)t, y = (1.01)12t, y = (1.2)t/10, clasificándolas como que representan un crecimiento exponencial o un decremento.

9. Comparar las propiedades de dos funciones cada una representa de distinta forma (algebraicamente, gráficamente, numéricamente en tablas o por medio de descripción verbal). *Por ejemplo, dada una gráfica de una función cuadrática y una expresión algebraica de otra, decir cual tiene el máximo más grande.*

Construir funciones F-BF

Construir una función que modela una relación entre dos cantidades.

1. Escribir una función que describe una relación entre dos cantidades.
   a. Determinar una expresión explícita, un proceso recursivo o los pasos para el cálculo a partir de un contexto.
   b. Combinar los tipos de función estándar utilizando operaciones aritméticas. *Por ejemplo, construir una función que modela la temperatura de un cuerpo de enfriamiento agregando una función constante a una exponencial en caída, y relacionar estas dos funciones con el modelo.*
   c. (+) Composición de funciones. *Por ejemplo, si T(y) es la temperatura en la atmósfera como una función de la altitud, y h(t) es la altitud de un globo climatológico como una función del tiempo, entonces T(h(t)) es la temperatura en la ubicación del globo climatológico como una función del tiempo.*
2. Escribir secuencias aritméticas y geométricas tanto recursivamente y como con una fórmula explícita, utilizarlas para modelar situaciones y traducir entre las dos formas.

Construir nuevas funciones a partir de funciones existentes.

3. Identificar el efecto en la gráfica reemplazando $f(x)$ por $f(x) + k$, $k\,f(x)$, $f(kx)$, y $f(x + k)$ por valores específicos de k (tanto positivos como negativos); encontrar el valor de k dadas las gráficas. Experimentar con los casos e ilustrar una explicación de los efectos de la gráfica utilizando medios tecnológicos. Incluir reconocer funciones pares e impares desde sus gráficas y sus expresiones algebraicas.
4. Encontrar las funciones inversas.
   a. Resolver una ecuación de la forma f(x) = c para una función simple f que tiene un inverso y una expresión escrita para el inverso. *Por ejemplo,* $f(x) = 2\,x^3$ *o* $f(x) = (x+1)/(x–1)$ *para* $x \neq 1$.
   b. (+) Verificar mediante composición que una función es la inversa de la otra.
   c. (+) Leer los valores de una función inversa desde una gráfica o tabla, dado que la función tiene un inverso.
   d. (+) Una función invertible aparte de una función no invertible mediante la restricción del dominio.
5. (+) Comprender la relación inversa entre los exponentes y logaritmos y utilizar esta relación para resolver problemas que involucran logaritmos y exponentes.

Modelos lineales, cuadráticos y exponenciales F-LE

Construir y comparar modelos lineales, cuadráticos y exponenciales para resolver problemas.

1. Distinguir entre situaciones que pueden ser modeladas con funciones lineales y con funciones exponenciales.
   a. Probar que las funciones lineales crecen por diferencias iguales durante intervalos iguales y que las funciones exponenciales crecen por factores iguales durante intervalos iguales.
   b. Reconocer situaciones en las cuales una cantidad cambia a razón constante por intervalo de unidad relativa a otra.
   c. Reconozca situaciones en las cuales una cantidad crece o decrece a razón constante de porcentaje por intervalos de unidad relativa a otra.
2. Construir funciones exponenciales y lineales, incluyendo secuencias geométricas y aritméticas, dando una gráfica, una descripción de relación, o dos pares de entrada-resultado (incluyendo la lectura de estos desde una tabla).
3. Observar mediante el uso de gráficas y tablas que una cantidad que se incrementa exponencialmente eventualmente excederá a una cantidad que se incrementa linealmente, cuadráticamente o (más generalmente) como una función polinómica.

4. Para modelos exponenciales, expresar como una solución logra rítmica para $ab^{ct} = d$ donde *a*, *c*, y *d* son números y la base *b es* 2, 10, o *e*; evaluar el logaritmo usando tecnología.

Interpretar expresiones para funciones en términos de la situación que modelan.

5. Interpretar los parámetros en una función lineal o exponencial en términos de un contexto.

Funciones trigonométricas F-TF

Extender el dominio de funciones trigonométricas utilizando el círculo unitario.

1. Comprender la medición en radianes de un ángulo como la longitud del arco en el círculo unitario subtendido por el ángulo.
2. Explicar cómo el círculo unitario en el plano de coordenadas permite la extensión de funciones trigonométricas para todos los números reales, interpretado como medidas de radianes de ángulos que atraviesan en el sentido opuesto a las manecillas del reloj alrededor del círculo unitario.
3. (+) Utilizar tengo los especiales para determinar geométricamente los valores del seno, coseno y la tangente para $\pi/3$, $\pi/4$ y $\pi/6$, además utilizar el círculo unitario para expresar el valor del seno, coseno y tangente para x, $\pi + x$, *y* $2\pi - x$ en términos de sus valores para x, donde x es cualquier número real.
4. (+) Utilizar el círculo unitario para explicar la simetría (par e impar) y periodicidad de funciones trigonométricas.

Realizar el modelo del fenómeno periódico con funciones trigonométricas.

5. Elegir funciones trigonométricas para modelar fenómenos periódicos con amplitud específica, frecuencia y línea media.
6. (+) Comprender que restringir una función trigonométrica a un dominio en el cual siempre se está incrementando o siempre se encuentra decrementando, permite la construcción de su inverso.
7. (+) Utilizar funciones inversas para resolver ecuaciones trigonométricas que surgen modelando contextos; evaluar las soluciones utilizando tecnología e interpretarlas en términos del contexto.

Probar y aplicar identidades trigonométricas.

8. Probar la identidad Pitagórica $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ y utilizarla para encontrar $\sin(\theta)$, $\cos(\theta)$ o la $\tan(\theta)$, dado $\sin(\theta)$, $\cos(\theta)$, o $\tan(\theta)$ y el cuadrante de un ángulo.
9. (+) Probar la suma y resta de fórmulas para seno, coseno y tangente y utilizarlas para resolver problemas.

Matemáticas - Modelado de secundaria: Introducción

El modelado las matemáticas y la estadística del salón de clases con el trabajo en la vida cotidiana y la toma de decisiones. Modelar es el proceso de elegir y utilizar las matemáticas y estadísticas apropiadas para analizar situaciones empíricas, entenderlas mejor y mejorar la toma de decisiones. Las cantidades y sus relaciones en la física, economía, política publica, sociedad y situaciones cotidianas pueden ser modeladas usando métodos matemáticos y estadísticos. Cuando se realizan modelos matemáticos, la tecnología es valioso para variar las suposiciones, explorar consecuencias y comprar predicciones con datos.

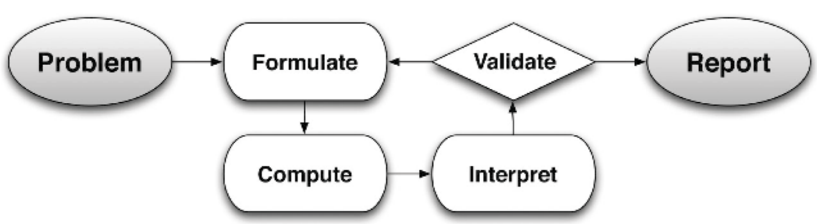
Un modelo puede ser muy simple, tal como escribir el costo total de un producto por unidad de precio y el número comprado, o utilizar una forma geométrica para describir un objeto físico como una moneda. Incluso esos modelos simples involucran hacer elecciones. Es nuestra decisión modelar una moneda como un cilindro tridimensional o si por otro lado, un disco de dos dimensiones funciona lo suficientemente bien para nuestros propósitos. Otras situaciones de modelado como una ruta de envíos, un calendario de producción o una comparativa de amortización del préstamo, necesitan modelos más elaborados que utilicen otras herramientas provenientes de las ciencias matemáticas. Las situaciones del mundo real no están organizadas y etiquetadas para ser analizadas; la formulación de modelos viables, la representación de tales modelos y el análisis de estos es un proceso propiamente creativo. Al igual que cada uno de estos procesos, esto depende de la experiencia adquirida así como de la creatividad.

Algunos ejemplos de estas situaciones pueden incluir:

- Estimar cuánta agua y comida es necesaria para una situación de emergencia en una ciudad devastada de 3 millones de personas y como podría ser distribuida.
- Planear un torneo de tenis de mesa para siete jugadores en un club con cuatro mesas, donde cada jugador juegue en contra de todos los demás jugadores.
- El diseño y disposición de los puestos en una feria escolar para recaudar el mayor dinero posible.
- Analizar la distancia de frenado de un automóvil.
- Modelando el balance de una cuenta de ahorros, el crecimiento de una colonia de bacterias o el aumento de las inversiones.
- Llevar a cabo análisis profundos de caminos por ejemplo, el cambio de pistas aplicado a una aeronave en el aeropuerto.
- Analiza los riesgos en situaciones como deportes extremos, pandemias y terrorismo.
- Relacionar estadísticas de población con predicciones individuales.

En situaciones como éstas, los modelos proyectados dependen de un número de factores: ¿Qué tan precisa es la respuesta que necesitamos o buscamos? ¿Qué aspectos de la situación son los que más necesitamos entender, controlar o optimizar? ¿Qué recursos de tiempo y herramientas tenemos? El rango de modelos que podemos crear y analizar también se encuentra delimitado por las limitaciones nuestras habilidades matemáticas, estadísticas y técnicas así como nuestra habilidad para reconocer variables significativas y las relaciones entre ellas. Los diagramas de varios tipos, hojas de cálculo, otras tecnologías y el álgebra son poderosas herramientas para el entendimiento y resolución de problemas establecidos para distintos tipos de situaciones del mundo real.

Uno de los conocimientos que proporciona el modelado matemático es que esencialmente la misma estructura matemática o estadística en algunas ocasiones puede modelar situaciones aparentemente diferentes Los modelos también pueden iluminar a las estructuras matemáticas por sí mismas, por ejemplo, como cuando un modelo de crecimiento de bacterias hace más vivida la explosión del crecimiento de una función exponencial.



El ciclo de modelado básico se resume en el diagrama. Involucra (1) identificar variables en la situación y seleccionar aquellas que representan características esenciales, (2) formular un modelo creando y seleccionando representaciones geométricas, gráficas, tabulares, algebraicas o estadísticas que describan las relaciones entre las variables, (3) analizar y efectuar operaciones en estas relaciones para trazar conclusiones, (4) interpreta los resultados matemáticos en términos de la situación original, (5) validar las conclusiones comparándolas con la situación, y después mejorar el modelo o si es aceptable, (6) reportar las conclusiones y el razonamiento detrás de ello. Las elecciones, suposiciones y aproximaciones son representadas a lo largo de este ciclo.

En el modelo descriptivo, modelo simplemente describe el fenómeno o lo resume en forma compacta. Las gráficas de observaciones son un modelo descriptivo familiar; por ejemplo, las gráficas de temperatura global y CO2 en la atmósfera a lo largo del tiempo.

El modelado analítico busca explicar datos en base a ideas teóricas profundas, aunque con parámetros que están basados de forma empírica; por ejemplo, el crecimiento exponencial de colonias de bacterias (hasta que ciertos mecanismos de corte tales como la contaminación o la inanición intervengan) seguido de una tasa de reproducción constante. Las funciones son una herramienta importante para el análisis de dichos problemas.

Las herramientas para graficar, hojas de cálculo, sistemas de álgebra por computadora y el software dinámico de geometría son poderosas herramientas que pueden ser utilizadas para modelar fenómenos puramente matemáticos (p. ej. el comportamiento de polinomios) así como fenómenos físicos.

Estándares de modelado

Hacer modelos se comprende mejor no como una colección de temas aislados, sino en relación con otros estándares. Hacer modelos matemáticos es un estándar de la práctica matemática, y los estándares específicos de la elaboración de modelos aparecen durante todos los estándares de la preparatoria indicados por un símbolo de asterisco ( ).

Matemáticas - Geometría de secundaria: Introducción

El entendimiento de los atributos y las relaciones de los objetos geométricos puede aplicarse en varios contextos; interpretar un diagrama esquemático, estimar la cantidad de madera necesaria para el marco de un tejado inclinado, hacer gráficos en computadora o diseñar un patrón de costura para lograr el uso más eficiente del material.

Aunque existen muchos tipos de geometría, las matemáticas escolares se dedican principalmente a la geometría euclidiana plana, que se estudia tanto sintéticamente (sin coordenadas) como analíticamente (con coordenadas). La geometría euclidiana se caracteriza fundamentalmente por el postulado de las paralelas, que indica que a través de un punto en una línea dada, hay exactamente una línea paralela. (La geometría esférica, en contraste, no tiene líneas paralelas).

Durante la secundaria, los estudiantes comienzan a formalizar sus experiencias en geometría de la escuela primaria y educación media, usando definiciones más precisas y desarrollando demostraciones cuidadosas. Después, en la universidad, algunos estudiantes desarrollarán cuidadosamente la geometría euclidiana y de otros tipos a partir de un pequeño conjunto de axiomas.

Los conceptos de congruencia, semejanza y simetría pueden comprenderse desde la perspectiva de la transformación geométrica. Los movimientos rígidos son fundamentales: traslaciones, rotaciones, reflexiones y combinaciones de éstos, de todos los cuales aquí se asume que mantienen la distancia y los ángulos (y, por lo tanto, las formas en general). Las reflexiones y las rotaciones explican cada una un tipo particular de simetría, y las simetrías de un objeto ofrecen información sobre sus atributos; como cuando la simetría de un triángulo isósceles asegura que los ángulos de su base son congruentes.

En el enfoque adoptado aquí, se define que dos figuras geométricas son congruentes si hay una secuencia de movimientos rígidos que convierten a uno en el otro. Este es el principio de superposición. Para los triángulos, la congruencia se refiere a la igualdad de todos los pares de lados correspondientes y de todos los pares de ángulos correspondientes. Durante los grados medios, a través de las experiencias en las que se dibujan triángulos a partir de condiciones dadas, los estudiantes encuentran formas de especificar suficientes medidas en un triángulo para asegurar que todos los triángulos dibujados con esas medidas sean congruentes. Cuando se han establecido los criterios de congruencia de estos triángulos (ALA, LAL y LLL) usando movimientos rígidos, pueden utilizarse para probar teoremas sobre triángulos, cuadriláteros y otras figuras geométricas.

Las transformaciones de semejanza (movimientos rígidos seguidos de expansiones) definen la semejanza de la misma forma en la que los movimientos rígidos definen la congruencia, formalizando de este modo las ideas de semejanza como «la misma forma» y «factor de escala» que se desarrollan en los grados medios. Estas transformaciones llevan a los criterios de semejanza de triángulos que indican que dos pares de ángulos correspondientes son congruentes.

Las definiciones de seno, coseno y tangente para ángulos agudos se basan en la semejanza de los triángulos rectángulos y, con el teorema de Pitágoras, son fundamentales en muchas situaciones teóricas y de la vida real. El teorema de Pitágoras es general para triángulos no rectángulos por la ley de cosenos. Juntas, las leyes de senos y cosenos comprenden los criterios de congruencia de triángulos para los casos en los que tres piezas de información son suficientes para resolver completamente un triángulo. Además, estas leyes conducen a dos posibles soluciones en los casos ambiguos, lo que ilustra que lado-lado-ángulo no es un criterio de congruencia.

La geometría analítica vincula el álgebra con la geometría, lo que da como resultado métodos poderosos de análisis y solución de problemas. De la misma forma en la que una línea numérica asocia números con ubicaciones en una dimensión, un par de ejes perpendiculares vinculan pares de números con ubicaciones en dos dimensiones. Esta correspondencia entre las coordenadas numéricas y los puntos geométricos permite que haya métodos del álgebra que pueden aplicarse en geometría y viceversa. El conjunto de soluciones de una ecuación se vuelve una curva geométrica, que a su vez se convierte en una herramienta de visualización para hacer y comprender el álgebra. Las formas geométricas pueden describirse con ecuaciones, lo que convierte la manipulación algebraica en una herramienta para la comprensión, modelado y demostración en geometría. Las transformaciones geométricas de las gráficas de ecuaciones corresponden con cambios algebraicos en sus ecuaciones.

Los entornos de geometría dinámica le ofrecen a los estudiantes herramientas experimentales y de modelado que les permite investigar fenómenos geométricos de una forma muy parecida a como los sistemas computacionales de álgebra les permite experimentar con fenómenos algebraicos.

Relaciones con las ecuaciones.

La correspondencia entre las coordenadas numéricas y los puntos geométricos permite que haya métodos del álgebra que pueden aplicarse en geometría y viceversa. El conjunto de soluciones de una ecuación se vuelve una curva geométrica, que se convierte en una herramienta de visualización para hacer y comprender el álgebra. Las formas geométricas pueden describirse con ecuaciones, lo que convierte la manipulación algebraica en una herramienta para la comprensión, modelado y demostración en geometría.

Prácticas matemáticas

1. Dar sentido a los problemas y perseverar para solucionarlos.
2. Razonar de manera abstracta y cuantitativa.
3. Generar argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.
4. Hacer modelos matemáticos.
5. Usar las herramientas adecuadas estratégicamente.
6. Prestar atención a la precisión.
7. Buscar y hacer uso de la estructura.
8. Buscar y expresar regularidad en el razonamiento repetido.

Resumen de geometría

Congruencia
- Experimentar con transformaciones en el plano
- Comprender la congruencia en términos de movimientos rígidos
- Demostrar teoremas geométricos
- Elaborar construcciones geométricas

Semejanza, triángulo rectángulo y trigonometría
- Comprender la semejanza en términos de transformaciones de semejanza
- Demostrar teoremas de semejanza
- Definir las relaciones trigonométricas y resolver problemas con triángulos rectángulos.
- Aplicar trigonometría a triángulos en general

Círculos
- Comprender y aplicar los teoremas de círculos
- Encontrar longitudes de arcos y áreas de sectores en círculos

Expresar las propiedades geométricas con ecuaciones
- Traducir entre la descripción geométrica y la ecuación de una sección cónica
- Usar coordenadas para demostrar algebraicamente teoremas geométricos simples

Dimensión y medición geométrica
- Explicar las fórmulas para calcular el volumen y usarlas para resolver problemas
- Visualizar las relaciones entre los objetos bidimensionales y tridimensionales

Elaboración de modelos con geometría
- Aplicar conceptos de geometría en situaciones de elaboración de modelos

Congruencia G-CO

Experimentar con transformaciones en el plano

1. Conocer las definiciones precisas de ángulo, círculo, línea perpendicular, línea paralela y segmento lineal con base en las nociones indefinidas de punto, línea, distancia sobre una línea y distancia alrededor de un arco circular.
2. Representar las transformaciones en el plano usando, por ejemplo, transparencias y software de geometría; describir las transformaciones como funciones que toman puntos en el plano como entradas y dan otros puntos como salidas. Comparar las transformaciones que preservan la distancia y el ángulo con aquellas que no lo hacen (por ejemplo, traslación en contraste con la expansión horizontal).
3. Con un rectángulo, paralelogramo, trapezoide o polígono regular dado, describir las rotaciones y reflexiones que los convierte en lo que son.
4. Desarrollar definiciones de rotaciones, reflexiones y traslaciones en términos de ángulos, círculos, líneas perpendiculares, líneas paralelas y segmentos de línea.
5. Con una figura geométrica y una rotación, reflexión o traslación dados, dibuje la figura transformada usando, por ejemplo, papel milimetrado, papel para calcar o un software de geometría. Especificar una secuencia de transformaciones que convierta una figura geométrica en otra.

Comprender la congruencia en términos de movimientos rígidos

6. Utilizar descripciones geométricas de movimientos rígidos para trasformar figuras y predecir el efecto de un movimiento rígido dado en una figura dada; con dos figuras dadas, usar la definición de congruencia en términos de movimientos rígidos para decidir si son congruentes.
7. Utilizar la definición de congruencia en términos de movimientos rígidos para demostrar que dos triángulos son congruentes si y sólo si sus pares de lados correspondientes y sus pares de ángulos correspondientes son congruentes.
8. Explicar cómo los criterios de congruencia para triángulos (ALA, LAL y LLL) se desprenden de la definición de congruencia en términos de movimientos rígidos.

Demostrar teoremas geométricos

9. Demostrar teoremas sobre líneas y ángulos. *Los teoremas incluyen: los ángulos verticales son congruentes; cuando una línea transversal cruza líneas paralelas, los ángulos interiores alternados son congruentes y los ángulos correspondientes son congruentes; los puntos en una bisectriz perpendicular en un segmento lineal son exactamente equidistantes de los extremos del segmento.*
10. Demostrar teoremas sobre triángulos. *Los teoremas incluyen: las medidas de los ángulos interiores de un triángulo suman 180°; los ángulos de la base de los triángulos isósceles son congruentes; el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y de la mitad de la longitud; las medianas de un triángulo se encuentran en un punto.*
11. Demostrar teoremas sobre paralelogramos. *Los teoremas incluyen: los lados opuestos son congruentes, los ángulos opuestos son congruentes, las diagonales de un paralelogramo se bisecan la una a la otra y, a la inversa, los rectángulos son paralelogramos con diagonales congruentes.*

Elaborar construcciones geométricas

12. Hacer construcciones geométricas con una variedad de herramientas y métodos (compás y regla, cuerda, dispositivos reflectantes, plegando papel, software de geometría dinámica, etc.). *Copiar un segmento; copiar un ángulo, bisecar un segmento; bisecar un ángulo; construir líneas perpendiculares, incluyendo la bisección perpendicular de un segmento lineal; y construir una línea paralela a una línea dada con un punto que no se encuentra en la línea.*
13. Construir un triángulo equilátero, un cuadrado y un hexágono inscritos en un círculo.

Semejanza, triángulo rectángulo y trigonometría G-SRT

Comprender la semejanza en términos de transformaciones de semejanza

1. Verificar experimentalmente las propiedades de las expansiones dadas por un centro y un factor de escala:
    a. Una expansión toma una línea que no pasa por el centro de la expansión de una línea paralela y deja una línea que pasa por el centro sin cambios.
    b. La expansión de un segmento lineal es mayor o menor por la relación dada por el factor de escala.
2. Con dos figuras dadas, utilizar la definición de semejanza en términos de transformaciones de semejanza para decidir si son semejantes; usando transformaciones de semejanza, explicar el significado de semejanza para triángulos como la igualdad de todos los pares de ángulos correspondientes y la proporcionalidad de todos los pares de lados correspondientes.
3. Utilizar las propiedades de las transformaciones de semejanza para establecer el criterio AA para que dos triángulos sean semejantes.

Demostrar teoremas de semejanza

4. Demostrar teoremas sobre triángulos. *Los teoremas incluyen: una línea paralela a un lado de un triángulo divide los otros dos proporcionalmente y, a la inversa; el teorema de Pitágoras se demostró usando la semejanza de los triángulos.*
5. Utilizar criterios de congruencia y semejanza de triángulos para resolver problemas y probar las relaciones de figuras geométricas.

Definir las relaciones trigonométricas y resolver problemas con triángulos rectángulos.

6. Comprender que, por semejanza, las proporciones de los lados en los triángulos rectángulos son propiedades de los ángulos en el triángulo, lo que conduce a las definiciones de las relaciones trigonométricas para ángulos agudos.
7. Explicar y utilizar la relación entre el seno y el coseno de los ángulos complementarios.
8. Utilizar relaciones trigonométricas y el teorema de Pitágoras para resolver triángulos rectángulos en problemas aplicados.

Aplicar trigonometría a triángulos en general

9. (+) Derivar la fórmula $A = 1/2\ ab \sin(C)$ para el área de un triángulo dibujando una línea auxiliar desde un vértice perpendicular al lado opuesto.
10. (+) Demostrar las leyes de seno y coseno y usarlas para resolver problemas.
11. (+) Comprender y aplicar la ley de senos y la ley de cosenos para encontrar medidas desconocidas en triángulos rectángulos y no rectángulos (por ejemplo, problemas de agrimensura, fuerzas resultantes).

Círculos G-C

Comprender y aplicar los teoremas de círculos

1. Demostrar que todos los círculos son semejantes.
2. Identificar y describir las relaciones entre ángulos inscritos, radios y cuerdas. *Incluir la relación entre los ángulos centrales, inscritos y circunscritos; los ángulos inscritos en un diámetro son ángulos rectos; el radio de un círculo es perpendicular a la tangente donde el radio intersecta el círculo.*
3. Construir los círculos inscritos y circunscritos de un triángulo y demostrar las propiedades de los ángulos para un cuadrilátero inscrito en un círculo.
4. (+) Trazar una línea tangente a un círculo dado desde un punto fuera del círculo.

Encontrar longitudes de arcos y áreas de sectores en círculos

5. Usando semejanza, derivar el hecho de que la longitud del arco intersectado por un ángulo es proporcional al radio, y definir la medida del ángulo en radianes como la constante de proporcionalidad; derivar la fórmula para calcular el área de un sector.

Expresar las propiedades geométricas con ecuaciones G-GPE

Traducir entre la descripción geométrica y la ecuación de una sección cónica

1. Derivar la ecuación de un círculo con un centro y un radio dados usando el teorema de Pitágoras; completar el cuadro para encontrar mediante una ecuación el centro y el radio de un círculo dado.
2. Derivar la ecuación de una parábola con un enfoque y directriz dados.
3. (+) Derivar las ecuaciones de elipses e hipérboles a partir de focos dados, utilizando el hecho de que la suma o la diferencia de las distancias desde los focos es constante.

Usar coordenadas para demostrar algebraicamente teoremas geométricos simples

4. Usar coordenadas para demostrar algebraicamente teoremas geométricos simples. *Por ejemplo, probar o refutar que una figura definida por cuatro puntos dados en el plano cartesiano es un rectángulo; probar o refutar que el punto* $(1, \sqrt{3})$ *se encuentra en el círculo cuyo centro es el origen y contiene el punto (0, 2).*
5. Probar los criterios de pendiente para líneas paralelas y perpendiculares, y utilizarlos para resolver problemas geométricos (por ejemplo, encontrar la ecuación de una línea paralela o perpendicular a una línea dada que pasa por un punto determinado).
6. Encontrar el punto en un segmento lineal dirigido entre dos puntos dados que fracciona el segmento en una proporción determinada.
7. Utilizar coordenadas para calcular los perímetros de polígonos y áreas de triángulos y rectángulos, por ejemplo, usando la fórmula para calcular la distancia.

Medición geométrica y dimensión G-GMD

Explicar las fórmulas para calcular el volumen y usarlas para resolver problemas

1. Ofrecer un argumento informal sobre las fórmulas para calcular la circunferencia de un círculo, el área de un círculo y el volumen de un cilindro, pirámide y cono. *Utilizar argumentos de bisección, el principio de Cavalieri y argumentos informales de límites.*
2. (+) Ofrecer un argumento informal usando el principio de Cavalieri para las fórmulas para calcular el volumen de una esfera y otras figuras sólidas.
3. Utilizar las fórmulas para cilindros, pirámides, conos y esferas para resolver problemas.

Visualizar las relaciones entre los objetos bidimensionales y tridimensionales

4. Identificar las formas de cortes transversales bidimensionales de objetos tridimensionales e identificar objetos tridimensionales generados por las rotaciones de objetos bidimensionales.

Elaborar modelos con geometría G-MG

Aplicar conceptos de geometría en situaciones de elaboración de modelos

1. Utilizar formas geométricas, sus medidas y sus propiedades para describir objetos (por ejemplo, modelar el tronco de un árbol o un torso humano como un cilindro).
2. Aplicar conceptos de densidad basados en el área y el volumen en situaciones de elaboración de modelos (por ejemplo, personas por milla cuadrada, BTU por pie cúbico).
3. Aplicar métodos geométricos para resolver problemas de diseño (por ejemplo, diseñar un objeto o estructura que se adapte a las limitaciones físicas o para minimizar el costo; trabajar con sistemas tipográficos en cuadrícula basados en proporciones.

Matemáticas - Estadística y probabilidad para secundaria: Introducción

Las decisiones o las predicciones suelen hacerse con base en datos; números en contexto. Estas decisiones o predicciones serían sencillas si los datos siempre enviaran un mensaje claro, pero el mensaje suele oscurecerse por la variabilidad. La estadística ofrece las herramientas para describir la variabilidad en los datos y tomar decisiones informadas que la tengan en cuenta.

Los datos se recopilan, muestran, resumen, examinan e interpretan para descubrir patrones y desviaciones de los patrones. Los datos cuantitativos pueden describirse en términos de características clave: medidas de forma, centro y distribución. La forma de una distribución de datos puede describirse como simétrica, asimétrica, plana o con forma de campana, y se puede resumir como una estadística que mide el centro (como la media o la mediana) y una estadística que mide la distribución (como la desviación estándar o el rango intercuartil). Diferentes distribuciones pueden compararse numéricamente usando estas estadísticas o visualmente usando diagramas. Conocer el centro y la propagación no es suficiente para describir una distribución. Qué estadísticas comparar, qué diagramas usar y lo que pueda significar el resultado de una comparación depende de la pregunta que se está investigando y de las acciones que llevarán a cabo en la vida real.

La aleatorización tiene dos usos importantes para llegar a conclusiones estadísticas. Primero, recolectar datos de una muestra aleatoria de una población hace posible llegar a conclusiones válidas sobre toda la población tomando en cuenta la variabilidad. Segundo, asignar distintos tratamientos aleatoriamente a un grupo de individuos permite realizar una comparación justa de la efectividad de estos tratamientos. Un resultado estadísticamente significativo es aquel que tiene pocas oportunidades de deberse únicamente a la suerte, y esto puede evaluarse únicamente bajo la condición de aleatoriedad. Las condiciones bajo las cuales los datos se recolectan son importantes para llegar a conclusiones a partir de los datos; al revisar críticamente los usos de la estadística en los medios públicos y otros reportes, es importante considerar el diseño del estudio, es decir, cómo se recolectaron los datos, los análisis utilizados y los resúmenes de los datos y las conclusiones a las que se llegaron.

Los procesos aleatorios pueden describirse matemáticamente utilizando un modelo probabilístico: una lista o descripción de los resultados posibles (el espacio de la muestra), en donde a cada uno de los estos se le asigna una probabilidad. En situaciones como lanzar una moneda, tirar un dado o sacar una carta de un mazo, puede ser razonable asumir que varios resultados son igualmente probables. En un modelo probabilístico, los puntos de la muestra representan resultados y se combinan para crear eventos; las probabilidades de los eventos pueden calcularse aplicando las reglas de la adición y la multiplicación. Interpretar estas probabilidades se basa en un entendimiento de la independencia y la probabilidad condicional, lo que puede abordarse mediante el análisis de tablas de dos vías.

La tecnología desempeña un papel importante en estadística y probabilidad al permitir que sea posible hacer diagramas, funciones de regresión, calcular coeficientes de correlación y simular muchos resultados posibles en un corto tiempo.

Relaciones con funciones y creación de modelos matemáticos.

Las funciones pueden usarse para describir datos; si los datos sugieren una relación lineal, las relaciones pueden modelarse con una línea de regresión, y su fuerza y dirección pueden expresarse mediante un coeficiente de correlación.

Prácticas matemáticas

1. Dar sentido a los problemas y perseverar para solucionarlos.
2. Razonar de manera abstracta y cuantitativa.
3. Generar argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.
4. Hacer modelos matemáticos.
5. Usar las herramientas adecuadas estratégicamente.
6. Prestar atención a la precisión.
7. Buscar y hacer uso de la estructura.
8. Buscar y expresar regularidad en el razonamiento repetido.

Resumen de estadística y probabilidad

Interpretar datos categóricos y cuantitativos
- Resumir, representar e interpretar datos con una sola variable de conteo o medición
- Resumir, representar e interpretar datos con dos variables categóricas y cuantitativas
- Interpretar modelos lineales

Hacer inferencias y justificar las conclusiones
- Comprender y evaluar los procesos aleatorios detrás de los experimentos estadísticos
- Hacer inferencias y justificar las conclusiones a partir de encuestas por muestreo, experimentos y estudios observacionales

Probabilidad condicional y las reglas de la probabilidad
- Comprender la independencia y la probabilidad condicional, y utilizarlas para interpretar datos
- Utilizar las reglas de la probabilidad para calcular las probabilidades de eventos compuestos en un modelo probabilístico uniforme

Usar la probabilidad para tomar decisiones
- Calcular los valores esperados y usarlos para resolver problemas
- Usar la probabilidad para evaluar los resultados de las decisiones

Interpretar datos categóricos y cuantitativos S-ID

Resumir, representar e interpretar datos con una sola variable de conteo o medición
1. Representar datos con diagramas en la recta numérica (gráficas de puntos, histogramas y diagramas de caja).
2. Utilizar las estadísticas apropiadas para la forma de la distribución de datos para comparar el centro (mediana, moda) y la dispersión (rango intercuartil, desviación estándar) de dos o más conjuntos de datos diferentes.
3. Interpretar las diferencias en la forma, centro y dispersión en el contexto de los conjuntos de datos, tomando en cuenta los posibles efectos de los puntos de datos en los extremos (datos atípicos).
4. Utilizar la media y la desviación estándar de un conjunto de datos para ajustarlo a una distribución normal y estimar los porcentajes de la población. Reconocer que hay conjuntos de datos para los cuales este procedimiento no es apropiado. Utilizar calculadoras, hojas de cálculo y tablas para estimar las áreas debajo de la curva normal.

Resumir, representar e interpretar datos con dos variables categóricas y cuantitativas
5. Resumir los datos categóricos para dos categorías en tablas de frecuencia de dos vías. Interpretar las frecuencias relativas en el contexto de los datos (incluyendo las frecuencias relativas conjuntas, marginales y condicionales). Reconocer posibles asociaciones y tendencias en los datos.
6. Representar datos con dos variables cuantitativas en un diagrama de dispersión y describir cómo se relacionan las variables.
   a. Ajustar una función a los datos; utilizar funciones ajustadas para los datos para resolver problemas en el contexto de los datos. Usar las funciones dadas o elegir una función sugerida por el contexto. Destacar los modelos lineales, cuadráticos y exponenciales.
   b. Evaluar informalmente el ajuste de una función diagramando y analizando los residuos.
   c. Ajustar una función lineal para un diagrama de dispersión que sugiere una asociación lineal.

Interpretar modelos lineales
7. Interpretar la pendiente (tasa de cambio) y la intersección (término constante) de un modelo lineal en el contexto de los datos.
8. Calcular (utilizando tecnología) e interpretar el coeficiente de correlación de un ajuste lineal.
9. Distinguir entre correlación y causalidad.

Hacer inferencias y justificar conclusiones S-IC

Comprender y evaluar los procesos aleatorios detrás de los experimentos estadísticos

1. Comprender la estadística como un proceso para hacer inferencias sobre parámetros de una población con base en una muestra aleatoria de dicha población.
2. Decidir si un modelo específico es consistente con los resultados de un proceso de generación de datos determinado, por ejemplo, utilizando una simulación. *Por ejemplo, un modelo indica que una moneda girando tiene una probabilidad de 0.5 de caer de cara. ¿Que cayera de cruz 5 veces seguidas te haría cuestionar el modelo?*

Hacer inferencias y justificar las conclusiones a partir de encuestas por muestreo, experimentos y estudios observacionales

3. Reconocer los propósitos y las diferencias entre encuestas por muestreo, experimentos y estudios observacionales; explicar cómo la aleatorización se relaciona con cada uno.
4. Utilizar los datos de una encuesta por muestreo para estimar la media o la proporción de una población; desarrollar un margen de error mediante el uso de modelos de simulación para muestreo aleatorio.
5. Utilizar los datos de un experimento aleatorizado para comparar dos tratamientos; utilizar simulaciones para decidir si las diferencias entre los parámetros son significativas.
6. Evaluar informes basados en datos.

Probabilidad condicional y las reglas de la probabilidad S-CP

Comprender la independencia y la probabilidad condicional, y utilizarlas para interpretar datos

1. Describir eventos como subconjuntos de un espacio muestral (el conjunto de resultados) utilizando características (o categorías) de los resultados o como uniones, intersecciones o complementos de otros eventos (“o”, “y”, “no”).
2. Comprender que dos eventos A y B son independientes si la probabilidad de que A y B ocurran juntas es el producto de sus probabilidades, y utilizar esta caracterización para determinar si son independientes.
3. Comprender la probabilidad condicional de A dado B como $P(A \text{ y } B)/P(B)$, e interpretar la independencia de A y B como decir que la probabilidad condicional de A dado B es la misma que la probabilidad de A, y que la probabilidad condicional de B dado A es la misma que la probabilidad de B.
4. Construir e interpretar tablas de frecuencia de datos de dos vías cuando dos categorías se asocian con cada objeto que se está clasificando. Utilizar la tabla de dos vías como un espacio muestral para decidir si los eventos son independientes y para hacer aproximaciones de las probabilidades condicionales. *Por ejemplo, recolectar datos de una muestra aleatoria de estudiantes en tu escuela sobre su clase favorita entre matemáticas, ciencia e inglés. Estimar la probabilidad de que un estudiante seleccionado aleatoriamente en tu escuela prefiera ciencia dado que el estudiante está en décimo grado. Hacer lo mismo con otras clases y comparar los resultados.*
5. Reconocer y explicar los conceptos de probabilidad condicional e independencia en lenguaje cotidiano y situaciones cotidianas. *Por ejemplo, comparar la probabilidad de padecer cáncer de pulmón si se es un fumador con la probabilidad de ser un fumador si se padece cáncer de pulmón.*

Utilizar las reglas de la probabilidad para calcular las probabilidades de eventos compuestos en un modelo probabilístico uniforme

6. Encontrar la probabilidad condicional de A dado B como la fracción de los resultados de B que también pertenecen a A, e interpretar la respuesta en forma de un modelo.
7. Aplicar la regla de suma, $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) – P(A \text{ y } B)$, e interpretar la respuesta en forma de un modelo.
8. (+) Aplicar la regla general de la multiplicación en un modelo de probabilidad uniforme, $P(A \text{ y } B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$, e interpretar la respuesta en forma de un modelo.
9. (+) Utilizar permutaciones y combinaciones para calcular las probabilidades de eventos compuestos y resolver problemas.

Usar la probabilidad para tomar decisiones S-MD

Calcular los valores esperados y usarlos para resolver problemas

1. (+) Definir una variable aleatoria para una cantidad de interés asignando un valor numérico a cada evento en un espacio muestral; graficar la distribución probabilística correspondiente usando las mismas visualizaciones gráficas empleadas para las distribuciones de datos.
2. (+) Calcular el valor esperado de una variable aleatoria; interpretarlo como la media de la distribución probabilística.
3. (+) Desarrollar una distribución probabilística para una variable aleatoria definida para un espacio muestral en el que pueden calcularse probabilidades teóricas; encontrar el valor esperado. *Po ejemplo, encontrar la distribución probabilística teórica para el número de respuestas correctas que se obtienen adivinando en las cinco preguntas de un examen de opción múltiple en el que cada pregunta tiene cuatro opciones y encontrar el grado esperado bajo distintos esquemas de evaluación.*
4. (+) Desarrollar una distribución probabilística para una variable aleatoria definida para un espacio muestral en el que las probabilidades se asignan empíricamente; encontrar el valor esperado. *Por ejemplo, encontrar una distribución de datos actuales sobre el número de televisores por hogar en los Estados Unidos y calcular el número esperado de televisores por hogar. ¿Cuántos televisores esperarías encontrar en 100 hogares seleccionados al azar?*

Usar la probabilidad para evaluar los resultados de las decisiones

5. (+) Considerar los posibles resultados de una decisión asignando probabilidades a los valores de la posibilidad de ganar y encontrar los valores esperados.
    a. Encontrar la posibilidad de ganar esperada para un juego de azar. *Por ejemplo, calcular las posibilidades de ganar esperadas para un billete de la lotería estatal o de un sorteo en un restaurante de comida rápida.*
    b. Evaluar y comparar estrategias con base en los valores esperados. *Por ejemplo, comparar una póliza de seguro con un deducible alto con una póliza con un deducible bajo usando varias, pero razonables, posibilidades de tener un accidente menor o un accidente grave.*
6. (+) Usar probabilidades para tomar decisiones justas (por ejemplo, dibujos por lotes, usar un generador de números aleatorios).
7. (+) Analizar decisiones y estrategias empleando conceptos de probabilidad (por ejemplo, pruebas de productos, pruebas médicas, retirar al portero al final de un partido de hockey y reemplazarlo por un atacante).

Nota sobre los cursos y las transiciones

La parte para secundaria de los Estándares de Contenido de Matemáticas especifica las matemáticas que todos los estudiantes deben estudiar para estar preparados para la universidad y una carrera. Estos estándares no dictan la secuencia de las clases de secundaria. Sin embargo, la organización de las clases de secundaria es un componente crítico para la implementación de los estándares. Con ese propósito, planes para matemáticas de secundaria de muestra (Álgebra I, Geometría y Álgebra II) así como una secuencia integrada de las clases (Matemáticas 1, Matemáticas 2, Matemáticas 3) se pondrán a disposición en un corto plazo después de la publicación final de los Estándares Estatales Comunes de Educación. Se espera que también estén disponibles planes modelo adicionales basados en esos estándares.

Los estándares por sí mismos no rigen el programa de estudios, la pedagogía o la impartición de contenido. Los Estados, en particular, pueden manejar la transición hacia la secundaria en formas diferentes. Por ejemplo, muchos estudiantes en los Estados Unidos cursan Álgebra I en el octavo grado actualmente, y en algunos Estados este es un requisito. Los estándares K-7 contienen los requisitos previos para preparar a los estudiantes para cursar Álgebra I en el octavo grado, y los estándares están diseñados para permitir que los Estados continúen aplicando las políticas existentes relacionadas con cursar Álgebra I en el octavo grado.

Una segunda transición importante es la transición de la secundaria a la educación postsecundaria para la universidad y las carreras. La evidencia relativa a la preparación para la universidad y las carreras muestra claramente que el conocimiento, las habilidades y las prácticas importantes para la preparación incluyen una gran cantidad de matemáticas antes del límite indicado con los símbolos (+) en estos estándares. De hecho, parte del contenido con la mayor prioridad para la preparación para la universidad y las carreras proviene de los grados 6 a 8. Este material incluye competencias poderosas y útiles, tales como aplicar el razonamiento de proporción en problemas matemáticos y de la vida real, calcular con fluidez con fracciones y decimales positivos y negativos, y resolver problemas matemáticos y de la vida real relacionados con la medición de ángulos, el cálculo del área, el área de superficies y el cálculo del volumen. Dado que los estándares importantes para la preparación para la universidad y las carreras se distribuyen en grados y clases, los sistemas para evaluar la preparación para la universidad y las carreras deben cubrir los estándares desde los grados 6 a 8. Es importante señalar también que los puntajes u otra información generada por los sistemas de evaluación de la preparación para la universidad y las carreras debe desarrollarse en colaboración con representantes de los programas de desarrollo de educación superior y fuerza laboral, y deben ser validados por el desempeño posterior de los estudiantes en la universidad y en el campo laboral.

Glosario

Algoritmo de cálculo. Un conjunto de pasos predefinidos que pueden aplicarse a una clase de problemas que ofrecen el resultado correcto en todos los casos cuando los pasos se llevan a cabo correctamente. *Consultar también:* estrategia de cálculo.

Congruencia. Dos figuras planas o sólidas son congruentes si una puede obtenerse a partir de la otra mediante un movimiento rígido (una secuencia de rotaciones, reflexiones y traslaciones).

Conteo. Una estrategia para encontrar el número de elementos en un grupo sin tener que contar cada uno de los elementos en el grupo. Por ejemplo, si se sabe que una pila de libros tiene 8 libros y se añaden 3 libros más en la parte superior, no es necesario contar la pila nuevamente. Es posible encontrar el total contando; señalando el libro en la parte superior y diciendo «ocho», y después «nueve, diez, once. Ahora hay once libros».

Datos con dos variables. Pares de observaciones numéricas vinculadas. Ejemplo; una lista con las alturas y pesos de cada jugador en un equipo de football. Diagrama de caja. Un método para mostrar visualmente una distribución de valores de datos usando la mediana, los cuartiles y los extremos del conjunto de datos. Una caja muestra el 50% del medio de los datos.[1]

Decimal finito. Se denomina finito a un decimal si el dígito que se repite es 0.

Decimal periódico. La forma decimal de un número racional. *Consultar también:* decimal finito.

Desviación absoluta de la media. Una medida de la variación en un conjunto de datos numéricos que se calcula sumando las distancias entre cada valor y la media, y después dividiendo el resultado entre el número de valores de datos. Ejemplo: Para el conjunto de datos {2, 3, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 22, 120}, la desviación absoluta de la media es 20.

Diagrama de cinta. Un dibujo que se parece a un segmento de cinta y que se utiliza para ilustrar las relaciones numéricas. También conocido como diagrama de tira, modelo de barra, tira de fracción o modelo de longitud.

Diagrama de dispersión. Una gráfica en el plano de coordenadas que representa un conjunto de datos con dos variables. Por ejemplo, las alturas y los pesos de un grupo de personas pueden mostrarse en un diagrama de dispersión.[2]

Diagrama de puntos. *Consultar*: diagrama lineal.

Diagrama de recta numérica. Un diagrama de recta numérica utilizado para representar números y permitir razonar sobre los mismos. En un diagrama de recta numérica para medir cantidades, el intervalo de 0 a 1 en el diagrama representa la unidad de medida para la cantidad.

Diagrama lineal. Un método para presentar visualmente una distribución de valores de datos en donde el valor de cada dato se muestra como un punto o una marca arriba de una recta numérica. También se le conoce como diagrama de puntos.[3]

Distribución probabilística. El conjunto de valores posible de una variable aleatoria con una probabilidad asignada a cada una.

Espacio de la muestra. En un modelo probabilístico para un proceso aleatorio, es una lista de los resultados individuales que se van a considerar.

Estrategia de cálculo. Manipulaciones útiles que pueden elegirse para problemas específicos, que pueden no tener un orden fijo, y que pueden aplicarse para convertir un problema en otro. *Consultar también: algoritmo de cálculo*.

Expansión. Una transformación que mueve cada punto a lo largo de la semirrecta a través del punto que surge en un centro fijo, y multiplica las distancias desde el centro por un factor de escala común.

Figura rectilínea. Un polígono cuyos ángulos son todos ángulos rectos.

Forma expandida. Un número con varios dígitos se expresa de forma expandida cuando se escribe como una suma de múltiplos de un dígito elevados a potencias de diez. Por ejemplo, 643 = 600 + 40 + 3.

Fracción. Un número que puede expresarse en la forma a/b, en donde a es un número entero y b es un número entero positivo. (La palabra fracción en estos estándares siempre se refiere a un número no negativo). *Consultar también:* número racional.

Fracción compleja. Una fracción A/B en donde A y/o B son fracciones (B no es cero).

Inversos aditivos. Dos números cuya suma es igual a 0 son inversos aditivos el uno del otro. Ejemplo: 3/4 y – 3/4 son inversos aditivos el uno del otro porque 3/4 + (– 3/4) = (– 3/4) + 3/4 = 0.

Inversos multiplicativos. Dos números cuyo producto es igual a 1 son inversos multiplicativos el uno del otro. Ejemplo: 3/4 y 4/3 son inversos multiplicativos el uno del otro porque 3/4 × 4/3 = 4/3 × 3/4 = 1.

Línea media. En la gráfica de una función trigonométrica, la línea horizontal a la mitad entre sus máximos y mínimos. Multiplicación y división en un rango menor a 100. Multiplicación o división de dos números enteros cuyos resultados son números enteros, y cuyo producto o dividendo se encuentra en el rango de 0-100. Ejemplo: 72 ÷ 8 = 9.

Media. Una medida del centro en un conjunto de datos numéricos que se calcula al sumar los valores en una lista y después dividiendo el resultado entre el número de valores en la lista.[4] Ejemplo: Para el conjunto de datos {1, 3, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 22, 120}, la media es 21.

Mediana. Una medida del centro en un conjunto de datos numéricos. La mediana de una lista de valores es el valor que aparece en el centro de una versión ordenada de la lista; o la media de los dos valores centrales en los casos en los que la lista contiene un número par de valores. Ejemplo: Para el conjunto de datos {2, 3, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 22, 90}, la mediana es 11.

Modelo de fracción visual. Un diagrama de cinta, un diagrama de recta numérica o un modelo de área.

Modelo de probabilidad uniforme. Un modelo de probabilidad que le asigna probabilidades iguales a todos los resultados. *Consultar también:* modelo probabilístico.

Modelo probabilístico. Un modelo probabilístico se emplea para asignar probabilidades a los resultados de un proceso de azar examinando la naturaleza del proyecto. Al conjunto de todos los resultados se le llama espacio de la muestra, y sus probabilidades suman 1. *Consultar también:* modelo de probabilidad uniforme.

Modelos de probabilidad combinada independientemente. Se dice que dos modelos probabilísticos están combinados independientemente si la probabilidad de cada par ordenado en el modelo combinado es igual al producto de las probabilidades originales de los dos resultados individuales en el par ordenado.

Movimiento rígido. Una transformación de puntos en el espacio que consiste en una secuencia de una o más traslaciones, reflexiones y/o rotaciones. Aquí se asume que los movimientos rígidos mantienen las distancias y las medidas de los ángulos.

Número entero. Un número que puede expresarse en la forma a o -a para algún número a entero.

Número racional. Un número que puede expresarse en la forma a/b o – a/b para alguna fracción a/b. Los números racionales incluyen a los números enteros.

Números enteros. Los números 0, 1, 2, 3,....

Primer cuartil. Para un conjunto de datos con una media M, el primer cuartil es la mediana de los datos con valores menores a M. Por ejemplo Para el conjunto de datos {1, 3, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 22, 120}, el primer cuartil es 6.[5] *Consultar también:* mediana, tercer cuartil, rango intercuartil.

Principio de transitividad para la medición indirecta. Si la longitud del objeto A es mayor a la longitud del objeto B, y la longitud del objeto B es mayor a la longitud del objeto C, entonces la longitud del objeto A es mayor a la longitud del objeto C. Este principio se aplica también a la medición de otras cantidades.

Probabilidad. Un número entre 0 y 1 que se utiliza para cuantificar la probabilidad de los procesos que tienen resultados inciertos (como lanzar una moneda, seleccionar aleatoriamente una persona de un grupo de personas, arrojar una pelota a un blanco o hacer pruebas sobre una condición médica).

Propiedad asociativa de la multiplicación. Consultar la Tabla 3 de este glosario.

Propiedad asociativa de la suma. Consultar la Tabla 3 de este glosario.

Propiedad conmutativa. Consultar la Tabla 3 de este glosario.

Propiedad de identidad del 0. Consultar la Tabla 3 de este glosario.

Propiedades de la desigualdad. Consultar la Tabla 5 de este glosario.

Propiedades de la igualdad. Consultar la Tabla 4 de este glosario.

Propiedades de las operaciones. Consultar la Tabla 3 de este glosario.

Rango intercuartil. Una medida de la variación en un conjunto de datos numéricos; el rango intercuartil es la distancia entre el primer y el tercer cuartil de conjunto de datos. Ejemplo: Para el conjunto de datos {1, 3, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 22, 120}, el rango intercuartil es 15 – 6 = 9. *Consultar también:* primer cuartil, tercer cuartil.

Suma y resta dentro de 5, 10, 20, 100 o 1000. Suma o resta de dos números enteros cuya respuesta es un número entero y con los sumandos o minuendos en los rangos 0-5, 0-10, 0-20 o 0-100, respectivamente. Ejemplo: 8 + 2 = 10 es una suma en el rango menor a 10, 14 – 5 = 9 es una resta en el rango menor a 20 y 55 – 18 = 37 es una resta en el rango menor a 100.

Tasa porcentual de cambio. Una tasa de cambio expresada como un porcentaje. Ejemplo: si una población crece de 50 a 55 en un año, crece en un 5/50 = 10% por año.

Tercer cuartil. Para un conjunto de datos con una mediana M, el tercer cuartil es la mediana de los datos con valores mayores a *M*. Ejemplo: Para el conjunto de datos {2, 3, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 22, 120}, el tercer cuartil es 15. *Consultar también:* mediana, primer cuartil, rango intercuartil.

Transformación de semejanza. Un movimiento rígido seguido de una expansión.

Valor esperado. Para una variable aleatoria, el promedio calculado de sus posibles valores, con cálculos dados por sus probabilidades respectivas.

Variable aleatoria. La asignación de un valor numérico a cada resultado en un espacio de la muestra. Expresión racional. El cociente de dos polinomios con un denominador distinto de cero.

Vector. Una cantidad con magnitud y dirección en el plano o en el espacio, definido por un par ordenado o tres números reales.

[1]Adaptado del Departamento de Instrucción Pública de Wisconsin, http://dpi.wi.gov/standards/mathglos.html, accesado por última vez el 2 de marzo de 2010.

[2]Adaptado del Departamento de Instrucción Pública de Wisconsin, op. cit.

[3]Adaptado del Departamento de Instrucción Pública de Wisconsin, op. cit.

[4]Para ser más precisos, esto define la media aritmética.

[5]Se emplean muchos métodos diferentes para calcular los cuartiles. En ocasiones, al método definido aquí se le denomina el método de Moore y McCabe. Consultar Langford, E., “Quartiles in Elementary Statistics,” Journal of Statistics Education, Volumen 14, Número 3 (2006).

Tabla 1. Situaciones comunes de suma y resta.[1]

	Resultado desconocido	Cambio desconocido	Inicio desconocido
Sumar a	Dos conejos se sentaron en el césped. Tres conejos más saltaron al mismo lugar. ¿Cuántos conejos hay ahora en el césped? 2 + 3 = ?	Habían dos conejos sentados en el césped. Algunos conejos más saltaron al mismo lugar. Después habían cinco conejos. ¿Cuántos conejos saltaron sobre los dos primeros? 2 + ? = 5	Habían algunos conejos sentados en el césped. Tres conejos más saltaron al mismo lugar. Después habían cinco conejos. ¿Cuántos conejos habían antes en el césped? ? + 3 = 5
Tomar de	Habían cinco manzanas en la mesa. Me comí dos manzanas. ¿Cuántas manzanas hay ahora en la mesa? 5 – 2 = ?	Habían cinco manzanas en la mesa. Me comí algunas manzanas. Después quedaron tres manzanas. ¿Cuántas manzanas me comí? 5 – ? = 3	Habían algunas manzanas en la mesa. Me comí dos manzanas. Después quedaron tres manzanas. ¿Cuántas manzanas habían antes en la mesa? ? – 2 = 3
	Total desconocido	**Sumando desconocido**	**Ambos sumandos desconocidos**[2]
Juntar/ Separar[3]	Hay tres manzanas rojas y dos manzanas verdes en la mesa. ¿Cuántas manzanas hay en la mesa? 3 + 2 = ?	Hay cinco manzanas en la mesa. Tres son rojas y el resto son verdes. ¿Cuántas manzanas son verdes? 3 + ? = 5, 5 – 3 = ?	Mi abuela tiene cinco flores. ¿Cuántas puede poner en su florero rojo y cuántas en su florero azul? 5 = 0 + 5, 5 = 5 + 0 5 = 1 + 4, 5 = 4 + 1 5 = 2 + 3, 5 = 3 + 2
	Diferencia desconocida	**Se desconoce el mayor**	**Se desconoce el menor**
Comparar[4]	(Versión "¿cuántas más?"): Lucy tiene dos manzanas. Julie tiene cinco manzanas. ¿Cuántas manzanas tiene Julie más que Lucy? (Versión "¿cuántas menos?"): Lucy tiene dos manzanas. Julie tiene cinco manzanas. ¿Cuántas manzanas tiene Lucy menos que Julie? 2 + ? = 5, 5 – 2 = ?	(Versión con "más"): Julie tiene tres manzanas más que Lucy. Lucy tiene dos manzanas. ¿Cuántas manzanas tiene Julie? (Versión con "menos"): Lucy tiene 3 manzanas menos que Julie. Lucy tiene dos manzanas. ¿Cuántas manzanas tiene Julie? 2 + 3 = ?, 3 + 2 = ?	(Versión con "más"): Julie tiene tres manzanas más que Lucy. Julie tiene cinco manzanas. ¿Cuántas manzanas tiene Lucy? (Versión con "menos"): Lucy tiene 3 manzanas menos que Julie. Julie tiene cinco manzanas. ¿Cuántas manzanas tiene Lucy? 5 – 3 = ?, ? + 3 = 5

[2] Estas situaciones en las que se debe separar pueden usarse para mostrar todas las descomposiciones de un número dado. Las ecuaciones asociadas, que tienen el total a la izquierda del signo igual, ayudan a los niños a comprender que el signo = no siempre se utiliza para soluciones o resultados, pero que siempre significa que es el mismo número.
[3] Cualquier sumando puede ser desconocido, por lo que hay tres variaciones de este problema. Ambos sumandos desconocidos es una extensión productiva de esta situación básica, especialmente para números pequeños menores o iguales a 10.
[4] Para situaciones en las que se desconoce el mayor o se desconoce el menor, una versión dirige la operación correcta (la versión que utiliza más la incógnita mayor y menos la incógnita menor). Las otras versiones son más difíciles.

[1] Adaptado de Box 2-4 of Mathematics Learning in Early Childhood, Consejo Nacional de Investigación de los Estados Unidos (2009, pp. 32, 33).

Tabla 2. Situaciones comunes de multiplicación y división.[1]

	Producto desconocido $3 \times 6 = ?$	Se desconoce el tamaño del grupo (División con "¿Cuántos hay en Cada grupo?") $3 \times ? = 18$, y $18 \div 3 = ?$	Número de grupos Desconocido (División con "¿Cuántos grupos?") $? \times 6 = 18$, y $18 \div 6 = ?$
Grupos Iguales	Hay 3 bolsas con 6 ciruelas en cada una. ¿Cuántas ciruelas hay en total? *Ejemplo de medición*. Necesitas 3 tramos de cuerda, cada uno de 6 pulgadas de largo. ¿Cuánta cuerda necesitas en total?	Si se reparten igualmente 18 ciruelas en 3 bolsas, ¿cuántas ciruelas habrá en cada bolsa? *Ejemplo de medición*. Tienes 18 pulgadas de cuerda que cortarás en 3 tramos iguales. ¿Qué longitud tendrá cada tramo de cuerda?	Si se van a colocar 18 ciruelas en bolsas con 6 ciruelas, ¿cuántas bolsas se necesitan? *Ejemplo de medición*. Tienes 18 pulgadas de cuerda que cortarás en tramos de 6 pulgadas de largo. ¿Cuántos tramos de cuerda tendrás?
Matrices,[2] Área[3]	Hay 3 filas de manzanas con 6 manzanas en cada fila. ¿Cuántas manzanas hay? *Ejemplo de área*. ¿Cuál es el área de un rectángulo de 3 cm por 6 cm?	Si hay 18 manzanas ordenadas en 3 filas iguales, ¿cuántas manzanas hay en cada fila? *Ejemplo de área*. Un rectángulo tiene un área de 18 centímetros cuadrados. Si uno de los lados tiene una longitud de 3 cm, ¿cuál es la longitud del lado adyacente?	Si hay 18 manzanas ordenadas en filas iguales con 6 manzanas, ¿cuántas filas hay? *Ejemplo de área*. Un rectángulo tiene un área de 18 centímetros cuadrados. Si uno de los lados tiene una longitud de 6 cm, ¿cuál es la longitud del lado adyacente?
Comparar	Un sombrero azul cuesta \$6. Un sombrero rojo cuesta 3 veces lo que el sombrero azul. ¿Cuánto cuesta el sombrero rojo? *Ejemplo de medición*. Una banda elástica tiene 6 cm de largo. ¿Qué longitud tendrá la banda elástica cuando se haya estirado 3 veces su longitud?	Un sombrero rojo cuesta \$18, y eso es 3 veces lo que cuesta un sombrero azul. ¿Cuánto cuesta un sombrero azul? *Ejemplo de medición*. Una banda elástica se estira hasta alcanzar 18 cm de longitud, lo que es 3 veces su longitud original. ¿Cuál es la longitud original de la banda elástica?	Un sombrero rojo cuesta \$18 y un sombrero azul cuesta \$6. ¿Cuántas veces cuesta el sombrero rojo más que el sombrero azul? *Ejemplo de medición*. Una banda elástica tenía originalmente 6 cm de largo. Ahora se estiró hasta los 18 cm de largo. ¿Cuántas veces más larga es ahora la banda elástica de lo que era al principio?
General	$a \times b = ?$	$a \times ? = p$, y $p \div a = ?$	$? \times b = p$, y $p \div b = ?$

[2] El lenguaje en los ejemplos de matrices muestra la forma más simple de un problema de matrices. Una forma más complicada consiste en usar los términos filas y columnas: Las manzanas en el anaquel están en 3 filas y 6 columnas. ¿Cuántas manzanas hay ahí? Ambas formas son valiosas.

[3] El área incluye matrices de cuadros que se han juntado de forma que no hay espacios o superposiciones, entonces, los problemas de matrices incluyen estas situaciones de medición especialmente importantes.

[1] El primer ejemplo en cada celda es un ejemplo de cosas discretas. Estos son más sencillos para los estudiantes y deben mostrarse antes de los ejemplos de medición.

Tabla 3. Las propiedades de las operaciones. Aquí *a*, *b* y *c* representan números arbitrarios en un sistema numérico dado. Las propiedades de las operaciones se aplican al sistema de números racionales, al sistema de números reales y al sistema de números complejos.

Propiedad asociativa de la suma	$(a + b) + c = a + (b + c)$
Propiedad conmutativa de la suma	$a + b = b + a$
Propiedad de identidad aditiva del 0	$a + 0 = 0 + a = a$
Existencia de inversos aditivos	Para cada a existe $–a$ de forma que $a + (–a) = (–a) + a = 0$
Propiedad asociativa de la multiplicación	$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
Propiedad conmutativa de la multiplicación	$a \times b = b \times a$
Propiedad de identidad multiplicativa del 1	$a \times 1 = 1 \times a = a$
Existencia de inversos multiplicativos	Para cada $a \neq 0$ existe $1/a$, de forma que $a \times 1/a = 1/a \times a = 1$
Propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma	$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

Tabla 4. Las propiedades de la igualdad. Aquí *a*, *b* y *c* representan números arbitrarios en el sistema de números racionales, en el sistema de números reales o en el sistema de números complejos.

Propiedad reflexiva de la igualdad	$a = a$
Propiedad simétrica de la igualdad	Si $a = b$, entonces $b = a$
Propiedad transitiva de la igualdad	Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$
Propiedad de igualdad de la suma	Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$
Propiedad de igualdad de la resta	Si $a = b$, entonces $a – c = b – c$
Propiedad de igualdad de la multiplicación	Si $a = b$, entonces $a \times c = b \times c$
Propiedad de igualdad de la división	Si $a = b$ y $c \neq 0$, entonces $a \div c = b \div c$
Propiedad de sustitución de la igualdad	Si $a = b$, entonces b puede sustituirse por a en cualquier expresión que contenga a.

Tabla 5. Las propiedades de la desigualdad. Aquí *a*, *b* y *c* representan números arbitrarios en el sistema de números racionales o en el sistema de números reales.

Exactamente una de las siguientes es verdadera: $a < b$, $a = b$, $a > b$.
Si $a > b$ y $b > c$ entonces $a > c$.
Si $a > b$, entonces $b < a$. Si $a > b$, entonces $–a < –b$.
Si $a > b$, entonces $a \pm c > b \pm c$.
Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $a \times c > b \times c$.
Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $a \times c < b \times c$.
Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $a \div c > b \div c$.
Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $a \div c < b \div c$.

Muestra de la bibliografía consultada

Documentos sobre los estándares estatales existentes.
Resúmenes de las investigaciones e informes proporcionados por investigadores al grupo de trabajo.
National Assessment Governing Board, *Mathematics Framework for the 2009 National Assessment of Educational Progress*. EE.UU. Educación de los Estados Unidos, 2008.
NAEP Validity Studies Panel, Validity Study of the NAEP Mathematics Assessment: Grades 4 and 8. Daro et al., 2007. Documentos sobre matemáticas de: Alberta, Canadá; Bélgica; China; Taipéi China; Dinamarca; Inglaterra; Finlandia; Hong Kong; India; Irlanda; Japón; Corea; Nueva Zelanda; Singapur; Victoria (Columbia Británica).
Adding it Up: Helping Children Learn Mathematics. Consejo Nacional de Investigación de los Estados Unidos, Mathematics Learning Study Committee, 2001.
Benchmarking for Success: Ensuring U.S. Students Receive a World-Class Education. Asociación Nacional de Gobernadores de Estados Unidos, Council of Chief State School Officers y Achieve, Inc., 2008.
Crossroads in Mathematics (1995) and *Beyond Crossroads* (2006).
American Mathematical Association of Two-Year Colleges (AMATYC).
Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics: A Quest for Coherence. Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos, 2006.
Focus in High School Mathematics: *Reasoning and Sense Making*. Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos. Reston, VA: NCTM.
Foundations for Success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel. EE.UU. Educación de los Estados Unidos: Washington, DC, 2008.
Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Report: A PreK-12 Curriculum Framework.
How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School. Bransford, J.D., Brown, A.L. y Cocking, R.R., eds. Committee on Developments in the Science of Learning, Commission on Behavioral and Social Sciences and Education, Consejo Nacional de Investigación, 1999.
Mathematics and Democracy, The Case for Quantitative Literacy, Steen, L.A. (ed.). National Council on Education and the Disciplines, 2001.
Mathematics Learning in Early Childhood: Paths Toward Excellence and Equity. Cross, C.T., Woods, T.A. y Schweingruber, S., eds. Committee on Early Childhood Mathematics, Consejo Nacional de Investigación de los Estados Unidos, 2009.
The Opportunity Equation: Transforming Mathematics and Science Education for Citizenship and the Global Economy. The Carnegie Corporation of New York and the Institute for Advanced Study, 2009. Disponible en línea en: http://www.opportunityequation.org/
Principles and Standards for School Mathematics. Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos, 2000.
The Proficiency Illusion. Cronin, J., Dahlin, M., Adkins, D., and Kingsbury, G.G.; prólogo de C.E. Finn, Jr. y M. J. Petrilli. Instituto Thomas B. Fordham, 2007.
Ready or Not: Creating a High School Diploma That Counts. American Diploma Project, 2004.
A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics. Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos, 2003.
Sizing Up State Standards 2008. Federación Americana de Profesores, 2008.
A Splintered Vision: An Investigation of U.S. Science and Mathematics Education. Schmidt, W.H., McKnight, C.C., Raizen, S.A., et al. EE.UU. National Research Center for the Third International Mathematics and Science Study, Michigan State University, 1997.
Stars By Which to Navigate? Scanning National and International Education Standards in 2009. Carmichael, S.B., W.S. Wilson, Finn, Jr., C.E., Winkler, A.M. y Palmieri, S., Instituto Thomas B. Fordham, 2009.
Askey, R., "Knowing and Teaching Elementary Mathematics," *American Educator*, otoño de 1999.
Aydogan, C., Plummer, C., Kang, S. J., Bilbrey, C., Farran, D. C. y Lipsey, M. W. (2005). An investigation of prekindergarten curricula: Influences on classroom characteristics and child engagement. Documento presentado en el NAEYC.
Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H-W. y Niss, M. (Eds) *Applications and Modeling in Mathematics Education*, ICMI Study 14. Ámsterdam: Springer.
Brosterman, N. (1997). *Inventing kindergarten*. Nueva York: Harry N. Abrams.
Clements, D. H. y Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Nueva York: Routledge.
Clements, D. H., Sarama, J. y DiBiase, A.-M. (2004). Mahwah, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
Cobb y Moore, "Mathematics, Statistics, and Teaching," *Amer. Math. Monthly* 104(9), pp. 801-823, 1997.
Confrey, J., "Tracing the Evolution of Mathematics Content Standards in the United States: Looking Back and Projecting Forward." K12 Mathematics Curriculum Standards conference proceedings, 5 y 6 de febrero de 2007. Conley, D.T. *Knowledge and Skills for University Success*, 2008.
Conley, D.T. *Toward a More Comprehensive Conception of College Readiness*, 2007.
Cuoco, A., Goldenberg, E. P. y Mark, J., "Habits of Mind: An Organizing Principle for a Mathematics Curriculum," *Journal of Mathematical Behavior*, 15(4), 375-402, 1996.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L. y Empson, S. B. (1999). *Children's Mathematics: Cognitively Guided Instruction*. Portsmouth, New Hampshire: Heinemann.
Van de Walle, J. A., Karp, K. y Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally* (séptima edición). Boston: Allyn y Bacon.
Ginsburg, A., Leinwand, S. y Decker, K., "Informing Grades 1-6 Standards Development: What Can Be Learned from High-Performing Hong Kong, Korea, and Singapore?" American Institutes for Research, 2009.
Ginsburg et al., "What the United States Can Learn From Singapore's World-Class Mathematics System (and what Singapore can learn from the United States)," American Institutes for Research, 2005.
Ginsburg et al., "Reassessing U.S. International Mathematics Performance: New Findings from the 2003 TIMMS and PISA," American Institutes for Research, 2005.
Ginsburg, H. P., Lee, J. S. y Stevenson-Boyd, J. (2008). Mathematics education for young children: What it is and how to promote it. *Social Policy Report*, 22(1), 1-24.
Harel, G., "What is Mathematics? A Pedagogical Answer to a Philosophical Question", en R. B. Gold and R. Simons (Eds.), *Current Issues in the Philosophy of Mathematics from the Perspective of Mathematicians*. Mathematical Association of America, 2008.
Henry, V. J. y Brown, R. S. (2008). First-grade basic facts: An investigation into teaching and learning of an accelerated, high-demand memorization standard. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 153-183.
Howe, R., "From Arithmetic to Algebra".
Howe, R., "Starting Off Right in Arithmetic", http://math.arizona.edu/~ime/2008-09/MIME/BegArith.pdf.
Jordan, N. C., Kaplan, D., Ramineni, C., and Locuniak, M. N., "Early math matters: kindergarten number competence and later mathematics outcomes," *Dev. Psychol.* 45, 850–867, 2009.
Kader, G., "Means and MADS", *Mathematics Teaching in the Middle School*, 4(6), 1999, pp. 398-403.
Kilpatrick, J., Mesa, V. y Sloane, F., "U.S. Algebra Performance in an International Context", en Loveless (ed.), *Lessons Learned: What International Assessments Tell Us About Math Achievement*. Washington, D.C.: Brookings Institution Press, 2007.
Leinwand, S. y Ginsburg, A., "Measuring Up: How the Highest Performing state (Massachusetts) Compares to the Highest Performing Country (Hong Kong) in Grade 3 Mathematics," American Institutes for Research, 2009.
Niss, M., "Quantitative Literacy and Mathematical Competencies," in *Quantitative Literacy: Why Numeracy Matters for Schools and Colleges*, Madison, B. L., and Steen, L.A. (eds.), National Council on Education and the Disciplines. Procedimientos del National Forum on Quantitative Literacy que se llevó a cabo en la National Academy of Sciences en Washington, D.C., 1 y 2 de diciembre de 2001.
Pratt, C. (1948). I learn from children. Nueva York: Simon y Schuster.
Reys, B. (ed.), *The Intended Mathematics Curriculum as Represented in State-Level Curriculum Standards: Consensus or Confusion?* IAP-Information Age Publishing, 2006.
Sarama, J. y Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Nueva York: Routledge.
Schmidt, W., Houang, R. y Cogan, L., "A Coherent Curriculum: The Case of Mathematics", *American Educator*, verano de 2002, p. 4.
Schmidt, W.H. y Houang, R.T., "Lack of Focus in the Intended Mathematics Curriculum: Symptom or Cause?" en Loveless (ed.), *Lessons Learned: What International Assessments Tell Us About Math Achievement*. Washington, D.C.: Brookings Institution Press, 2007.
Steen, L.A., "Facing Facts: Achieving Balance in High School Mathematics". *Mathematics Teacher*, Vol. 100. Edición especial. Wu, H., "Fractions, decimals, and rational numbers", 2007, http://math.berkeley.edu/~wu/ (March 19, 2008).
Wu, H., "Lecture Notes for the 2009 Pre-Algebra Institute", 15 de septiembre de 2009.
Wu, H., "Preservice professional development of mathematics Teachers", http://math.berkeley.edu/~wu/pspd2.pdf. Departamento de Educación de Massachusetts. Progress Report of the Mathematics Curriculum Framework Revision Panel,
Massachusetts Department of Elementary and Secondary Education, 2009. www.doe.mass.edu/boe/docs/0509/item5_report.pdf.
ACT College Readiness Benchmarks™ ACT College Readiness Standards™ ACT National Curriculum Survey™
Adelman, C. *The Toolbox Revisited: Paths to Degree Completion From High School Through College*, 2006.
Advanced Placement Calculus, Statistics and Computer Science Course Descriptions. *Mayo de 2009, mayo de 2010.* College Board, 2008.
Aligning Postsecondary Expectations and High School Practice: The Gap Defined (ACT: Policy Implications of the ACT National Curriculum Survey Results 2005-2006).
Condition of Education, 2004: Indicator 30, Top 30 Postsecondary Courses, Departamento de Educación de los Estados Unidos, 2004.
Condition of Education, 2007: High School Course-Taking. EE.UU. Educación de los Estados Unidos, 2007.
Crisis at the Core: Preparing All Students for College and Work, ACT. Achieve, Inc., Florida Postsecondary Survey, 2008.
Golfin, Peggy, et. al. CNA Corporation. *Strengthening Mathematics at the Postsecondary Level: Literature Review and Analysis*, 2005.
Camara, W.J., Shaw, E. y Patterson, B. (13 de junio de 2009). First Year English and Math College Coursework. College Board: Nueva York, Nueva York (disponible con los autores).

CLEP Precalculus Curriculum Survey: Summary of Results. The College Board, 2005.
College Board Standards for College Success: Mathematics and Statistics. College Board, 2006.
Miller, G.E., Twing, J. y Meyers, J. “Higher Education Readiness Component (HERC) Correlation Study.” Austin, Texas: Pearson.
On Course for Success: A Close Look at Selected High School Courses That Prepare All Students for College and Work, ACT.
Out of Many, One: Towards Rigorous Common Core Standards from the Ground Up. Achieve, 2008.
Ready for College and Ready for Work: Same or Different? ACT.
Rigor at Risk: Reaffirming Quality in the High School Core Curriculum, ACT.
The Forgotten Middle: Ensuring that All Students Are on Target for College and Career Readiness before High School, ACT.
Achieve, Inc., Virginia Postsecondary Survey, 2004.
ACT Job Skill Comparison Charts
Achieve, Mathematics at Work, 2008.
The American Diploma Project Workplace Study. National Alliance of Business Study, 2002.
Carnevale, Anthony y Desrochers, Donna. *Connecting Education Standards and Employment: Course-taking Patterns of Young Workers,* 2002.
Colorado Business Leaders Top Skills, 2006.
Hawai'i Career Ready Study: access to living wage careers from high school, 2007. States' Career Cluster Initiative. *Essential Knowledge and Skill Statements*, 2008. ACT WorkKeys Occupational Profiles™
Program for International Student Assessment (PISA), 2006.
Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS), 2007.
International Baccalaureate, Mathematics Standard Level, 2006.
University of Cambridge International Examinations: General Certificate of Secondary Education in Mathematics, 2009.
EdExcel, General Certificate of Secondary Education, Mathematics, 2009.
Blachowicz, Camille y Peter Fisher. “Vocabulary Instruction.” En *Handbook of Reading Research*, Volumen III, editado por Michael Kamil, Peter Mosenthal, P. David Pearson y Rebecca Barr, pp. 503-523. Mahwah, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 2000.
Gándara, Patricia y Frances Contreras. *The Latino Education Crisis: The Consequences of Failed Social Policies.* Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 2009.
Moschkovich, Judit N. “Supporting the Participation of English Language Learners in Mathematical Discussions”. *For the Learning of Mathematics* 19 (marzo de 1999): 11-19.
Moschkovich, J. N. (en prensa). Language, culture, and equity in secondary mathematics classrooms. A publicarse en F. Lester y J. Lobato (Ed.), Teaching and Learning Mathematics: Translating Research to the Secondary Classroom, Reston, VA: NCTM.
Moschkovich, Judit N. “Examining Mathematical Discourse Practices”, *para Learning of Mathematics* 27 (marzo de 2007): 24-30.
Moschkovich, Judit N. “Using Two Languages when Learning Mathematics: How Can Research Help Us Understand Mathematics Learners Who Use Two Languages?” *Research Brief and Clip*, National Council of Teachers of Mathematics, 2009
http://www.nctm.org/uploadedFiles/Research_News_and_Advocacy/Research/Clips_and_Briefs/Research_brief_12_Using_2.pdf. (accesado por última vez el 25 de noviembre de 2009).
Moschkovich, J.N. (2007) Bilingual Mathematics Learners: How views of language, bilingual learners, and mathematical communication impact instruction. En N. Nasir y P. Cobb (Eds.), *Diversity, Equity, and Access to Mathematical Ideas*. Nueva York: Teachers College Press, 89-104.
Schleppegrell, M.J. (2007). The linguistic challenges of mathematics teaching and learning: A research review. *Reading & Writing Quarterly,* 23:139-159.
Individuals with Disabilities Education Act (IDEA), 34 CFR §300.34 (a). (2004).
Individuals with Disabilities Education Act (IDEA), 34 CFR §300.39 (b)(3). (2004).
Office of Special Education Programs, U.S. Departamento de Educación de los Estados Unidos. “IDEA Regulations: Identification of Students with Specific Learning Disabilities,” 2006.
Thompson, S. J., Morse, A.B., Sharpe, M. y Hall, S., “Accommodations Manual: How to Select, Administer and Evaluate Use of Accommodations and Assessment for Students with Disabilities”, segunda edición. Council of Chief State School Officers, 2005.